خیلی سبز!

شب امتحان

هندسه ۳

امتحان نهایی

برای دسترسی به همه کتاب های کنکور به صورت رایگان و pdf وارد کانال زیر شوید❤️
@BankBookkonkor

براساس سبک جدید امتحانات نهایی

ویژهٔ نهایی ۱۴۰۴

ویژه ارتقاء معدل

محمدجواد نوری

دوازدهم ریاضی

به نام خدا

عنوان و نام پدیدآور: هندسه (۳) شب امتحان (دوازدهم ریاضی)
نوری، محمدجواد
مشخصات نشر: تهران، خیلی‌سبز، ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری: ۵۹ ص. ، جدول۲۲×۲۹، سم.
شابک: ۰-۷۳۷-۴۱۲-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
موضوع: هندسه--راهنمای آموزشی (متوسطه).
موضوع: هندسه--پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه).
شماره کتابشناسی ملی: ۵۴۳۱۵۷۵
۵۵۱۳۶۱۴

نام کتاب: هندسه (۳) شب امتحان (دوازدهم ریاضی)
ناشر: خیلی‌سبز وابسته به توسعه خیلی‌سبز
مؤلف: محمدجواد نوری
ویراستاران علمی: راضیه جلالی - پیام ابراهیم‌نژاد - صادق محمدی - سپهر متولی - کیوان صارمی - علیرضا کاظمی‌بقا - مهدی براتی
ویراستاران فنی: نگار ضرغامی‌پناه - فرزانه نوری
طراح جلد: حسین پاشازاده
گرافیست جلد: حسین پاشازاده - زهرا گنجی - رعنا جمالی
طراح گرافیک متن: لیلا صالح‌پور
گرافیست همکار: فرناز ابوالحسنی - انسیه ترکمان
رسم شکل: انسیه ترکمان - مرتضی ضیایی
حروفچینی: ناصر قربانی رفعت
صفحه‌آرایی: سیده زهره غفاری - زهرا محمود
لیتوگرافی: گلپاگرافیک
چاپخانه: برتر
نوبت چاپ: بیستم - ۱۴۰۳
تیراژ: ۲۰۰۰ جلد
قیمت: ۸۹۰۰۰ تومان
تلفن مرکز پخش: ۶۳۵۶۳ (۰۲۱)
صندوق پستی: ۸۱۷۷ - ۱۴۱۵۵
SMS: ۳۰۰۰۶۳۵۶۳

محتوای افزوده
مرتبط با این کتاب را
با اسکن این QRCode ببینید

نظرات و نکات ویرایشی‌تان در مورد این کتاب را می‌توانید از طریق آیدی تلگرامی Edit_kheilisabz@ برای ما بفرستید.

kheilisabz

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان هندسه (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

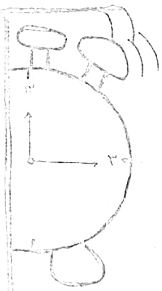
ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱، خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ است.

در پایان کتاب هم، آزمون‌های نهایی خرداد و شهریور۱۴۰۳ را برایتان آورده‌ایم.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند☺ در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

		نوبت	صفحهٔ آزمون	صفحهٔ پاسخ‌نامه
آزمون شمارهٔ ۱	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۳	۲۱
آزمون شمارهٔ ۲	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۴	۲۲
آزمون شمارهٔ ۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۵	۲۴
آزمون شمارهٔ ۴	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۶	۲۵
آزمون شمارهٔ ۵ نهایی خرداد ۱۴۰۰	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۷	۲۷
آزمون شمارهٔ ۶ نهایی شهریور ۱۴۰۰	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۹	۲۸
آزمون شمارهٔ ۷ نهایی دی ۱۴۰۰	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۱۱	۲۹
آزمون شمارهٔ ۸ نهایی دی ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی‌شده)	دوم	۱۳	۳۰
آزمون شمارهٔ ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۴	۳۲
آزمون شمارهٔ ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۶	۳۳
آزمون شمارهٔ ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۱	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۱۸	۳۵
آزمون شمارهٔ ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۲	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۲۰	۳۶
درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان				۳۸
آزمون نهایی خرداد ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۵۳	[illegible]
آزمون نهایی شهریور ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	دوم	۵۵	[illegible]

بارم‌بندی دروس هندسه (۳)

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم (خرداد، شهریور و دی ماه)
فصل اول		۱۶	۶
فصل دوم	تا صفحهٔ ۳۹	۴	۸
	بعد از صفحهٔ ۳۹	-	
فصل سوم		-	۶
جمع		۲۰	۲۰

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شماره (۱)	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره

فصل اول

۱ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. — ۰/۲۵

اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه .... = $(A^{-1})^{-1}$.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. — ۱

الف) اگر A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$.

ب) اتحادهای جبری دربارهٔ ماتریس‌ها برقرار هستند.

پ) ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است.

ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|BA|=|AB|=|A||B|$.

۳ ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $a_{ij}=2i+3j$ را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی را بیابید. — ۱

با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی.

۴ اگر $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}$، نشان دهید: $A^2-4A-5I_3=\bar{O}$. — ۱/۵

خواسته باشه I_3 یعنی $I_{3\times3}$.

۵ دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$. — ۱/۵

دقت کن که باید تمام درایه‌های ماتریس AB، صفر شوند.

۶ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبهٔ 2×2 باشد و $|A|=-2$، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. — ۱

$|A^4|-4|A^{-1}|+3$

دقت کن ضریب ۴ بیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان.

۷ اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1\\4&3\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $5A^{-1}+B^{-1}$ را به دست آورید. — ۱/۲۵

ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.

۸ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}7&5&1\\3&-1&2\\-2&5&4\end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار برحسب ستون اول محاسبه کنید. — ۱/۵

حواست باشه حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود.

۹ مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}2x+3y=4\\ax-y=2a\end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد. — ۱

بی‌شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق‌بودن دو خط.

فصل دوم

۱۰ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. — ۰/۷۵

الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ....

ب) رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر ....

پ) اگر در معادلهٔ تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta>0$، آن‌گاه خط و دایره ....

۱۱ یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. — ۰/۷۵

دقت کن که صفحهٔ P از رأس مخروط نگذشته.

۱۲ مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. — ۰/۷۵

«مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ثابت ۱ واحد باشند.»

خط L از طرفین نامحدود است.

۱۳ خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ L واحد باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث کنید.) — ۱/۵

۱۴ الف) دایره به معادلهٔ $4(x-1)^2+(2y+1)^2=1$ را رسم کنید. — ۱/۵

ب) مساحت این دایره چه‌قدر است؟

برای محاسبهٔ مساحت دایره فقط به شعاع نیاز داری.

۱۵ به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y=0$ را بیابید. — ۱/۵

راه‌حل تشریحی لازمه نه استفاده از فرمول.

۱۶ مقدار a را چنان بیابید که خط $y+3x=a$ بر دایرهٔ $2x^2+2y^2-3x+y=0$ مماس باشد. — ۱/۵

به ضریب ۲ برای x^2 و y^2 دقت کن.

۱۷ وضعیت دو دایرهٔ روبه‌رو را نسبت به هم بررسی کنید. — ۱/۷۵

$\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y-1=0\\x^2+y^2+4x+2y+1=0\end{cases}$

فصل اول

۱ جاهای خالی را با مقدار مناسب پُر کنید. ۱

الف) اگر $A_{۳\times n}$ ، $B_{۲\times ۴}$ و حاصل‌ضرب $A\times B$ قابل تعریف باشد، آن‌گاه n برابر است با .... و مرتبهٔ $A\times B$ برابر است با ....

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با ....

پ) اگر یک سطر از ماتریس مربعی برابر صفر باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس برابر است با ....

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

الف) در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ آن‌گاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

ب) اگر A، B و C سه ماتریس باشند و $AB=AC$ ، آن‌گاه $B=C$.

۳ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}$ به صورت زیر تعریف شوند: ۲

یادت هست $A\times B$ با $B\times A$ فرق داره.

$$a_{ij}=\begin{cases}i-j & i>j\\ i^۲+۱ & i=j\\ i+j-۱ & i<j\end{cases}\ ,\ b_{ij}=\begin{cases}i^۲-j & i>j\\ ۲i-j & i=j\\ i+j & i<j\end{cases}$$

ماتریس‌های A ، B و $A\times B$ را بیابید.

۴ برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $(-۲A-۳I)+B$ را به دست آورید. ۱

دقت کن که چون A و B ماتریس ۲ × ۲ هستند باید I را نیز ۲ × ۲ در نظر بگیری.

۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & x\\ y & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، x و y را طوری بیابید که ماتریس $A\times B$ قطری باشد. ۱

۶ اگر دترمینان ماتریس $A_{۳\times ۳}$ برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، آن‌گاه $|۳A^{-۱}|$ چه‌قدر است؟ ۰/۷۵

دقت کن که ضریب ۳، داخل دترمینان است.

۷ ثابت کنید وارون هر ماتریس در صورت وجود منحصربه‌فرد است. ۱

۸ اگر $\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۷\\ ۲ & -۱ & ۱\\ x & ۱ & ۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲ & ۷\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}x+a$ باشد، مقدار a را بیابید. ۱/۲۵

حواست باشه این‌ها دترمینان هستند نه ماتریس!

۹ نشان دهید دستگاه $\begin{cases}۲x+۳y=-۱\\ x-y=۲\end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد است، سپس جواب آن را به روش ماتریس وارون بیابید. ۱/۵

فراموشت نشه ابتدای کار باید نشان بدهی دستگاه یک جواب دارد.

فصل دوم

۱۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

الف) اگر صفحه‌ای، عمود بر محور دوران استوانه، آن را قطع کند، سطح مقطع صفحه و استوانه یک دایره است.

ب) مرکز دایرهٔ $۴x^۲+۴y^۲-۸x+۱۲y-۳=۰$ ، نقطهٔ $O=(۴,-۶)$ است.

۱۱ یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. در حالتی که صفحهٔ P بر محور رویهٔ مخروطی عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه و رویه چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. ۰/۷۵

دقت کن که روی صفحهٔ P دوتا شرط است.

۱۲ مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. ۰/۷۵

«مرکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط مفروض d ، در نقطهٔ A مماس باشند.»

حواست باشه نقطهٔ A روی خط d است.

۱۳ چهار نقطهٔ A ، B ، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقاط C و D نیز به یک فاصله باشد. (روی تعداد جواب‌ها بحث کنید.) ۱/۵

۱۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ (۰,۰) گذشته و نقطهٔ (۲,۱-) مرکز آن باشد. ۱

دقت کن که (۰,۰) مرکز دایره نیست!

۱۵ دایره‌ای از دو نقطهٔ (۱,۱-) و (۵,۳) می‌گذرد و مرکز دایره روی خط $y=۲x-۲$ قرار دارد. معادلهٔ دایره را بنویسید. ۱/۷۵

۱۶ وضعیت نقطهٔ (۲,۱) و خط $۳x+۴y-۱=۰$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۱=۰$ مشخص کنید. ۱/۷۵

۱۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O=(-۱,۱)$ مرکز آن بوده و با دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس‌خارج باشد. ۲

حواست به مماس خارج باشه یادت که تست معادله داخل هم داریم!

۲۰

ردیف	سؤال	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینانِ وارونِ ماتریس A برابر است با .... ب) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با	۰/۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر A یک ماتریس از مرتبهٔ n و $k\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$. ب) دو دایره متخارج‌اند هرگاه مجموع شعاع‌های آن‌ها از طول خط‌المرکزین دو دایره بیشتر باشد. پ) نقطهٔ $A(1,2)$ داخل دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x=4$ است.	۰/۷۵
۳	اگر ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i\le j\\ j-i & i>j\end{cases}$ تعریف شده باشد، مطلوب است: الف) درایه‌های ماتریس A. ب) دترمینان ماتریس A برحسب سطر اول.	۱/۵
۴	با یک مثال نقض نشان دهید قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. یعنی نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.	۱
۵	اگر A ماتریسی 3×3 و قطری باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A، در این صورت: الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید. ب) آیا $A\times B=B\times A$؟ پ) اگر A یک ماتریس اسکالر باشد به قسمت‌های (الف) و (ب) مجدداً پاسخ دهید.	۲
۶	اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$، ماتریس A^7-A^4 را بیابید.	۱/۲۵
۷	اگر $A=\begin{bmatrix}4 & \lvert A\rvert\\ \lvert A\rvert+3 & 2\end{bmatrix}$، آن‌گاه $\lvert A\rvert$ را بیابید.	۱/۲۵
۸	وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ را به دست آورده، سپس بررسی کنید ماتریسی که به دست آورده‌اید همان وارون A است.	۱/۲۵
۹	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}x+my=1\\ mx+4y=-2\end{cases}$ فاقد جواب باشد.	۱
۱۰	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P با مولد رویه موازی باشد و از رأس رویهٔ مخروطی عبور نکند در این صورت فصل مشترک صفحه و رویهٔ مخروطی چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.	۰/۷۵
۱۱	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,R)$ در صفحهٔ این دایره مماس داخل هستند $(r<R)$.»	۰/۷۵
۱۲	دو نقطهٔ A و B در دو طرف خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. سپس حالت‌های مختلف جواب را بررسی کنید.	۱/۵
۱۳	معادلهٔ قطرهای دایره‌ای به صورت $(m-2)x+(m-1)y=4$ است. اگر نقطهٔ $(0,1)$ روی دایره باشد، معادلهٔ دایره را بنویسید.	۱/۵
۱۴	خط $3x+4y=15$ وتری به طول ۸ داخل دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ می‌سازد. معادلهٔ این دایره را بنویسید.	۱/۷۵
۱۵	کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ $A=(2,-1)$ را از دایرهٔ $x^2+y^2=20$ بیابید.	۱/۵
۱۶	مقدار a را چنان بیابید که دو دایرهٔ $\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y+a=0\\ x^2+y^2-8x-2y+16=0\end{cases}$ بر هم مماس خارج باشند.	۱/۷۵

۱ در دو قسمت اول، درستی یا نادرستی عبارت را مشخص کنید و در دو قسمت بعدی با مقدار مناسب، جاهای خالی را پُر کنید. ۱

الف) اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^۲=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۹\end{bmatrix}$.

ب) A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌اند. اگر $AB=AC$، آن‌گاه $B=C$.

پ) اگر $A=[۲i+j]_{۲\times۲}$، آن‌گاه $|A|$ برابر است با ....

ت) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}$ برابر است با ....

۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۰}$ را محاسبه کنید. ۱

۳ اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند به طوری که $AB=BA$، آن‌گاه ثابت کنید: ۱/۵

الف) $(A+B)^۲=A^۲+B^۲+۲AB$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۴ برای هر ماتریس ۲×۲ مانند A ثابت کنید: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ ۰/۷۵

۵ اگر A ماتریس مربعی ۳×۳ و $k\in\mathbb{R}$، نشان دهید: $|kA|=k^۳|A|$ ۱/۲۵

۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&-۳\end{bmatrix}$ و $A^{-۱}=\alpha A+\beta I$، آن‌گاه α و β را بیابید. ۱/۵

۷ مقدار m را طوری بیابید که دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&m&۲\\m&۰&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ و دترمینانِ وارونِ ماتریس A با هم برابر باشند. ۱/۷۵

۸ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه مقابل دارای بی‌شمار جواب باشد. $\begin{cases}m(x-۱)=۳(x-y)\\۴x+(m+۱)y=۲\end{cases}$ ۱/۲۵

۹ یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P هر دو تکهٔ بالایی و پایینی رویهٔ مخروطی را قطع کند و شامل محور رویه نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و رویهٔ مخروطی، چه شکلی است؟ شکل مناسبی رسم کنید. ۰/۷۵

۱۰ مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. ۰/۷۵
«مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت R که بر خط d در صفحه مماس‌اند.»

۱۱ سه نقطهٔ A، B و C در یک صفحه‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ واحد باشد. تعداد نقاط را بررسی کنید. ۱/۵

۱۲ الف) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه رأس مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با رئوس $A=(۰,۰)$، $B=(۱,۱)$ و $C=(۰,۱)$ بگذرد. ۲
ب) مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۱۳ مکان هندسی نقاطی را بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از $(۱,۲)$ نصف فاصلهٔ آن‌ها از $(۲,۳)$ باشد. ۱/۵

۱۴ مطلوب است طول پاره‌خطی که دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۸y-۱۶=۰$ از خط $۵x+۱۲y=۱۴$ جدا می‌کند. ۲

۱۵ حدود m را طوری بیابید که معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+m=۰$، معادلهٔ دایره باشد. ۱/۵

موفق باشید | جمع نمرات ۲۰

آزمون نوبت اول

فصل اول

۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۰/۷۵)

به اسکالر بودن ماتریس توجه کن

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر .... است.

ب) شرط لازم و کافی برای این‌که ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد آن است که ....

پ) در ماتریس $A = [a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij} = \frac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با ....

۲. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۷۵)

توجه کن حذف عدد از طرفین تساوی است، نه حذف ماتریس!

الف) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$، آن‌گاه داریم: $A = B$.

ب) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

پ) اگر $A^۲ = A$ باشد در این صورت داریم $(A+I)^۲ = I + ۳A$.

۳. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. (۱)

قطری بودن A، کلید حل مسئله است.

۴. اگر $۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید. (۱/۵)

اون آخر کار خواسته باشه دترمینان وارون رو می‌خواد. اول کار هم به ضریب ۲ ماتریس دقت کن.

۵. جواب دستگاه مقابل را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. (۱)

$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۷ \\ ۲x + y = ۱ \end{cases}$

(روش $A^{-۱}$ نه روش حذفی!)

فصل دوم

۶. جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (۰/۲۵)

اگر صفحهٔ P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل‌مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک .... است.

۷. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (۰/۵)

(به کلمات بزنی هم دقت کن)

الف) مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

ب) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

۸. نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (۱/۲۵)

(بحث کنید)

۹. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۲,۱) بوده و بر خط $۳x + ۴y = -۵$ مماس باشد. (۱)

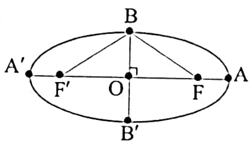
فاصلهٔ نقطه از خط یادت هست...

۱۰. وضعیت دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. (۱/۲۵)

بچه‌ها دایرهٔ دوم وضعیتش مشخصه، فقط در دایرهٔ اول، مرکز و شعاع رو پیدا کن.

۱۱. در شکل مقابل اگر $OA = a, OB = b, OF = c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲ = b^۲ + c^۲$ (۱)

یادت هست که توی درس‌نامه گفتیم BF با چی برابره؟!



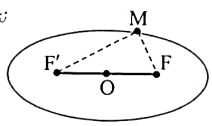
۱۲. نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. (۱/۵)

برو سراغ محاسبهٔ FF′ و بعد با OM مقایسه کن. به چه نتیجه‌ای می‌رسی؟

الف) نشان دهید مثلث MFF′ قائم‌الزاویه است.

ب) طول MF را به دست آورید.

(F و F′ کانون‌های بیضی هستند و MF < MF′)



ردیف	آزمون شمارهٔ ۵ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۰	نمره
۱۳	**اگر نقطهٔ $A(2,3)$ رأس سهمی و $y=7$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد:** **الف) معادلهٔ سهمی را به دست آورید.** **ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.** اگر رسم شکل انجام بدی خیلی بهتره.	۱/۲۵
	فصل سوم	
۱۴	**جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** **در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ $(-3,2,-5)$ در ناحیه (کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد.**	۰/۲۵
۱۵	**درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.** **اگر زاویهٔ بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.**	۰/۲۵
۱۶	**به سؤالات زیر پاسخ دهید.** **الف) اگر $y=b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد که از نقطهٔ $A=(2,-3,4)$ بگذرد، مقدار عددی b چه‌قدر است؟** **ب) معادلات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ است؟** **پ) در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحهٔ yoz و نقطهٔ $B=(-4,6,-3)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.**	۱/۲۵
۱۷	**اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$، $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آن‌گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.** همون فرمول تصویر قائم $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ رو بنویس به جای $\vec{b}$ بردار $\vec{b}+\vec{c}$ بگذار.	۱/۵
۱۸	**اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.** دقت کن جمع برداری سه بردار صفر شده، نه جمع اندازه‌های اون‌ها!	۱/۲۵
۱۹	**ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.**	۰/۷۵
۲۰	**سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$، $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروض‌اند.** **الف) برداری عمود بر دو بردار $-2\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.** **ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.** یادت که هست ضرایب عددی تأثیری در عمود بودن دو بردار ندارند.	۱/۷۵
	موفق باشید	
	جمع نمرات	۲۰

فصل اول

۱ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. — ۰/۲۵

ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند.

۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. — ۰/۲۵

اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ همواره برقرار است.

یادته کی اتحادها در ماتریس‌ها برقراره!

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد. — ۱/۵

خیلی‌ها به جای $A\times B$ بدون دقت $B\times A$ رو محاسبه می‌کنند!

۴ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. — ۱/۷۵

دقت کن دترمینان فقط روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

الف) آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

ب) حاصل $|A\times B|$ را به دست آورید.

۵ ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید. — ۱

یادت هست $(A^{-۱})^{-۱}$ چی می‌شد؟

۶ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد. — ۱/۲۵

کی دستگاه جواب نداره؟ آفرین ... وقتی که خط‌ها موازی باشند.

فصل دوم

۷ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. — ۰/۵

الف) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب) در حالتی که $\frac{c}{a}=۱$ بیضی به یک .... تبدیل می‌شود.

۸ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. — ۰/۵

الف) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل‌مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

ب) نقطهٔ $(۲,-۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x=۰$ قرار دارد.

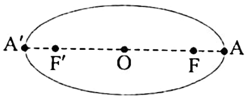
۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند. — ۱/۵

یه شکل مناسب بکش تا شعاع رو بفهمی چی می‌شه

۱۰ در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید. — ۱

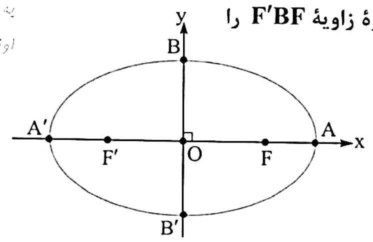
شیب خط مماس رو پیدا کنی تمومه. یادت که هست شعاع و خط مماس بر هم عمودند.

۱۱ در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند. ثابت کنید: $A'F'=AF$ — ۱/۲۵



۱۲ در بیضی زیر، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازهٔ زاویهٔ $F'BF$ را به دست آورید. — ۱/۲۵

یه مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع a، b و c توی بیضی بود. اونو پیدا کن.



ردیف	سؤال		نمره
۱۳	سهمی به معادلهٔ $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را در نظر بگیرید: الف) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید. ب) نمودار سهمی را رسم کنید.	معادلهٔ متعارف سهمی رو که بسازی همه چی حله.	۲
	فصل سوم		
۱۴	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. بردار $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ در فضای سه‌بعدی در صفحهٔ مختصات سه‌بعدی .... منطبق است. (xoz,yoz,xoy)		۰/۲۵
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای سه بردار $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $\mathbb{R}^3$، داریم: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.		۰/۲۵
۱۶	نقطهٔ A به طول ۲ روی محور xها و نقطهٔ B روی صفحهٔ xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند. الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید. ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید. پ) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.	دقت کن مختصات A و B رو درست پیدا کنی.	۲
۱۷	تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (1,-1,0)$ بیابید.		۱/۲۵
۱۸	بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های $\lvert\vec{a}\rvert = 3$ و $\lvert\vec{b}\rvert = 26$ و اندازهٔ ضرب خارجی $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = 72$ مفروض‌اند. اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم‌تر از 90° باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.	فرمول اندازهٔ ضرب خارجی کارسازه. فقط دقت کن زاویهٔ بین a و b هم حاده هستش.	۱/۲۵
۱۹	مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (2,-1,3)$، $\vec{b} = (0,m,-1)$ و $\vec{c} = (1,-2,3)$ در یک صفحه باشند.	سه بردار هم‌صفحه، حجم تولید نمی‌کنند، پس حجم متوازی‌السطوح صفره.	۱
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

فصل اول

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵)
اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، آن‌گاه: $|AB| = |A||B|$

۲. جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۰/۲۵)
هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون .... نامیده می‌شود.

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $x + 2y + 3z$ را به دست آورید. (۱/۲۵)

۴. اگر $A = [2i - 3j]_{2\times 2}$ و $B_{2\times 2} = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید. (۲)
حواست باشه ابتدا ضرب دو ماتریس رو تشکیل بدی.

۵. اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX = B$، ماتریس X را به دست آورید. (۱/۵)
حل یک دستگاه ساده به روش ماتریس وارون.

۶. اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، $|A| = 4$ باشد، آن‌گاه حاصل $||A|A|$ را به دست آورید.
یادته عدد از داخل دترمینان چه‌طوری خارج می‌شد؟

فصل دوم

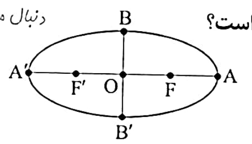
۷. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۵)
الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (L) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.
ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

۸. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (۰/۵)
الف) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
ب) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A در .... بیضی است.

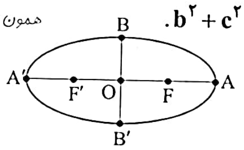
۹. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد. (۱)
دنبال شعاع بگرد!

۱۰. در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید. (۱/۵)

۱۱. اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ (۱/۲۵)
دنبال مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع a، b و c بگرد.



۱۲. در بیضی روبه‌رو: $OA = OA' = a$، $OB = OB' = b$، $OF = OF' = c$، ثابت کنید $b^2 + c^2 = a^2$. (۱/۲۵)
همون مثلث قائم‌الزاویهٔ سؤال ۱۱ کارت رو حل می‌کنه!



۱۳. سهمی $y^2 = 2x + 4y$ را در نظر بگیرید. (۲)
الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.
ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.
وای از دست این مربع کامل کردن ...!

فصل سوم

۱۴. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵)
نقطه با مختصات $(-2,3,-4)$ در ناحیهٔ (کنج) شمارهٔ ۵ محورهای مختصات سه‌بعدی واقع است.

ردیف	آزمون شمارهٔ ۷ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی دی ۱۴۰۰	نمره
۱۵	**جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** **اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$، در این صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.**	۰/۲۵
۱۶	**الف) در فضای سه‌بعدی نقطهٔ A روی محور xها به طول ۲ و نقطهٔ B در صفحهٔ yOz با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است، فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.** **ب) اگر طول، عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر، ۵ متر و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطهٔ مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.**	۲
۱۷	**بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید.** **الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.** **ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.** دقت کن کدوم یکی ضرب داخلی می‌خواد کدوم یکی ضرب خارجی!	۲
۱۸	**بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $\|\vec{a}\|=3$ ، $\|\vec{b}\|=26$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=72$.** **اگر زاویهٔ بین بردارها کم‌تر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.** بازم یک تست ترکیبی دیگه از فرمول‌های هندسی ضرب داخلی و خارجی. به زاویهٔ حاده توجه کن.	۱/۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شمارهٔ ۸	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی دی ۱۴۰۱	نمره

فصل اول

۱ **الف) اگر $A=\begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.** ۲/۲۵

ب) اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i<j \\ 1 & i>j \end{cases}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times3}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پ) ماتریس (B^2+2I) را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است.)

۲ **اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید:** $(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$ به اثبات عددی! یکبار A رو وارون کن، بار دیگه ۵A رو. ۱/۵

۳ **با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:** توان یک ماتریس، یعنی ماتریس رو توی خودش ضرب کنی. ۱

$$(A-3I)^2=A^2-6A+9I$$

۴ **اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $\left|-\frac{1}{2}A^4\right|$ را به دست آورید.** حواست باشه عدد چه‌جوری از دترمینان خارج می‌شه! ۱/۲۵

فصل دوم

۵ **الف) هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحهٔ P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحهٔ P و سطح ایجادشده بیضی است. (درست ـ نادرست)** ۰/۵

ب) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایرهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ مماس‌خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(1,-2)$ و شعاع .... است.

۶ **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(2,-1)$ مرکز آن بوده و از خط $3x-4y+10=0$ وتری به طول ۶ جدا کند.** بازم یه شکل قشنگ بکش تا شعاع رو متوجه بشی. ۱/۲۵

۷ **در دایره‌ای به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ است.** ۱

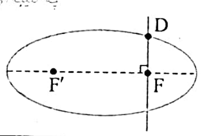
فکر کن مثال عددیه، برو مربع کامل کن.

۸ **در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(4,0)$ و $F'(-2,0)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است.** یه نقطه روی بیضی چه خصوصیتی داشت؟! ۱/۲۵

اگر نقطهٔ $P(1,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

۹ **بیضی با قطر بزرگ 2a ، قطر کوچک 2b و کانون‌های F و F′ مطابق شکل زیر مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، ثابت کنید:** $DF=\frac{b^2}{a}$ ۱/۲۵

یه اثباتیه کمی سخت. توجه کن D روی بیضی قرار داره پس چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟!



۱۰ **معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-3,2)$ مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی آن $x=1$ باشد.** پیدا کردن F در صفحهٔ مختصات و رسم خط $x=1$ خیلی بهت کمک می‌کنه. ۱/۲۵

۱۱ **مختصات نقاط برخورد سهمی $y^2+7x+5=0$ و دایرهٔ $x^2+y^2=25$ را به دست آورید.** ۱/۵

فصل سوم

۱۲ **الف) معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه‌ای به مختصات $A=(0,0,3)$ عمود باشد، به صورت .... است.** ۱/۲۵

ب) شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-1\le y<2$ و $y<-x^2+1$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

۱۳ **اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,n)$ و $\vec{b}=(1,0,-1)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.** ضرب داخلی دو بردار یادت بیاد. ۱/۵

۱۴ **ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آن‌گاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ ، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.** هم‌راستابودن یعنی $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ۱/۲۵

۱۵ **سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(0,2,1)$ را در نظر بگیرید:** ۲

الف) طول بردار $2\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می‌شود را به دست آورید.

	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

۱ عبارت‌های زیر را کامل کنید. ۰/۷۵

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با .... است.

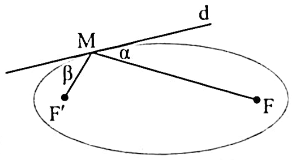
ب) نقطهٔ $A(۱,-۲)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد.

پ) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.

۲ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. ۱/۵

الف) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد، آن‌گاه $|۲A|=۴۰$ است.

ب) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است.



پ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد، زاویهٔ $F\hat{M}F'=۵۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=\beta=۶۰^\circ$ است.

ت) برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$، حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{o}$ است.

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد. ۱

۴ اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید. ۱

۵ ماتریس A مربعی مرتبهٔ سه به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد. ۱/۲۵

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.

۶ دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. ۱/۲۵

۷ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). ۱/۲۵

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد. ۱

۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس‌بیرونی باشد. ۱/۲۵

۱۰ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است. ۱/۲۵

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

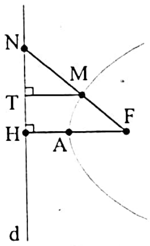
ب) مختصات کانون‌ها (F',F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A',A) و دو سر قطر کوچک (B',B) را به دست آورید.

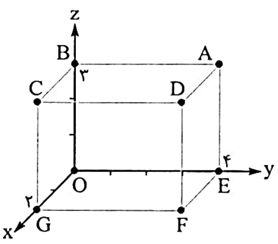
پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

۱۱ معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y-۸x+۹=۰$ را بیابید. ۱

۱۲ در شکل روبه‌رو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ۱/۲۵

ثابت کنید: $\dfrac{FN}{FA}=\dfrac{۲NT}{TH}$



ردیف		نمره
۱۳	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x^2 \le y \le 2$ را رسم کنید.	۰/۵
۱۴	با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) نام وجه از شکل که معادلهٔ آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. $x = 2, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 3$ ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید. پ) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحهٔ xOz باشد و مکعب‌مستطیل را نصف کند.  	۱/۲۵
۱۵	سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0,2,1)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.	۱
۱۶	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $\lvert\vec{a}\rvert = 6$ و $\lvert\vec{b}\rvert = 4$ و زاویهٔ بین آن‌ها ۳۰ درجه است، مقدار عبارت $\lvert 2\vec{a} \times \vec{b} \rvert$ را محاسبه کنید.	۱
۱۷	اگر $A = (2,-1,3)$ ، $B = (3,1,4)$ و $C = (-1,1,0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.	۱/۵
۱۸	برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = 0$.	۱
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۳۵ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	هندسه (۳)

نمره	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۲	آزمون شمارهٔ ۱۵	ردیف

فصل اول

۱ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+1&y+2\\3&2\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B=\begin{bmatrix}5&4\\8&3\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید. ۰/۵

۲ ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ معرفی شده است. مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطهٔ $k\,|kA|=625$ برقرار باشد. ۱/۲۵

۳ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}5&2\\7&3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید. ۱/۲۵

۴ اگر $A=\begin{bmatrix}|A|&0&1\\1&|A|&1\\0&2&1\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید. ۱

۵ دستگاه $\begin{cases}(m-3)x+3y=m\\4x+(m+1)y=2\end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد. ۱

فصل دوم

۶ مکان هندسی هریک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید. ۱

الف) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس‌خارجی‌اند.

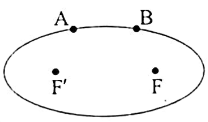
۷ الف) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، .... آن زاویه است. ۰/۵

ب) بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست ـ نادرست)

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,0)$ مرکز آن بوده و بر خط $x=-3$ مماس باشد. ۰/۷۵

۹ مقدار c را چنان بیابید که دایرهٔ $x^2+y^2-2x+2y+c=0$ بر دایرهٔ $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ مماس‌بیرون باشد. ۱/۷۵

۱۰ در شکل روبه‌رو دو نقطهٔ A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF'=BF$ و هم‌چنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد. ۱/۵



۱۱ سهمی با رأس $A(1,2)$ و کانون $F(1,-2)$ مفروض است. معادلهٔ سهمی و خط هادی آن را بنویسید. ۱/۵

۱۲ اگر اندازهٔ گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصلهٔ کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (با ارائهٔ راه حل) ۱

فصل سوم

۱۳ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x>-2$ و $y^2+x\leq0$ را در فضای دوبعدی رسم کنید. ۰/۷۵

۱۴ الف) در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ خطی موازی محور .... است. ۱/۵

ب) حاصل عبارت $(\vec{i}\times\vec{j})\cdot\vec{i}$ برابر صفر است. (درست ـ نادرست)

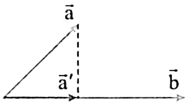
پ) زاویهٔ بین بردارهای غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدام‌یک از موارد زیر حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها بیشترین مقدار را دارد؟

۱) $\theta=0$ ۲) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{3}$

ت) کدام‌یک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست؟

۱) $\sqrt{3}\vec{a}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\times\vec{b}$ ۳) $2\vec{a}+3\vec{b}$ ۴) $\vec{b}\times\frac{\sqrt{2}}{5}\vec{a}$

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	زمان آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com	

ردیف	آزمون شماره (۱۰) — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۲	نمره
۱۵	نقطهٔ A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطهٔ B(۱,۰,۱) در فضا مفروض‌اند. فاصلهٔ مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.	۰/۷۵
۱۶	نشان دهید تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$، برابر $\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{2}}\vec{b}$ است. 	۱/۲۵
۱۷	بردارهای $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ، $\vec{b} = (۰,۱,۱)$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود، اندازهٔ ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۸	زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ و $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

۱ الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2x-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار x برابر با .... است. ۲

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}2 & m+1\\ 2n+4 & 5\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ m و n، ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبهٔ دو است.)

۲ اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A=[3i-2j]_{3\times 3}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ باشند، ۱

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس B^2 را محاسبه کنید.

۳ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید: ۱

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

۴ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبهٔ دو است.) ۱

۵ الف) در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آن‌گاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست ـ نادرست) ۱

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۶ الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک .... است. ۰/۵

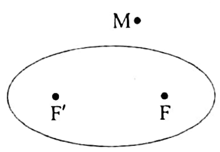
ب) سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست ـ نادرست)

۷ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست، در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. ۱/۵

۸ الف) حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-4x+6y+a=0$ معادلهٔ یک دایره باشد. ۲

ب) وضعیت خط $x+y=1$ و دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطهٔ M از کانون‌های F و F′ بزرگ‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است. ۱/۲۵



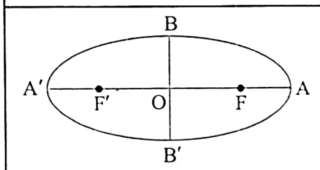
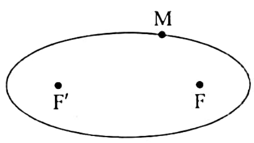
۱۰ اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد، فاصلهٔ رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید. ۰/۷۵

۱۱ الف) معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(2,3)$ رأس آن بوده و معادلهٔ خط هادی آن $x=3$ باشد. ۲

ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.

پ) مختصات نقطهٔ برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.

ردیف			نمره
	هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک — زمان آزمون: ۱۲۵ دقیقه — kheilisabz.com	
	آزمون شمارهٔ (۱۱)	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی شهریور ۱۴۰۱	
۱۲	الف) در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$، معادلهٔ محور .... است. ب) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$، آن‌گاه $\lvert\vec{b}\rvert = \lvert r\rvert\lvert\vec{a}\rvert$. (درست ـ نادرست) پ) شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $-1 < x \leq 2$ و $y = x^2$ را در فضای دوبعدی رسم کنید. ت) طول بردار $\vec{a} = (0, -3, 4)$ را به دست آورید.		۱/۷۵
۱۳	مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = (2, m, -1)$ و $\vec{b} = (m+1, 3, 2)$ بر هم عمود باشند.		۱
۱۴	اگر $\lvert\vec{a}\rvert = 3$، $\lvert\vec{b}\rvert = 5$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود، چه‌قدر است؟		۲
۱۵	حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a} = (1, 0, -1)$، $\vec{b} = (0, 2, 2)$ و $\vec{c} = (2, -3, 0)$ تولید می‌شود.		۱/۲۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ردیف		نمره
	فصل اول	
۱	**الف)** اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس .... می‌نامند. **ب)** اگر $A=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر .... است. **پ)** هر ماتریس مربعی وارون‌پذیر است. (درست ـ نادرست)	۰/۷۵
۲	ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i^2-j & i>j\\ i+j & i\le j\end{cases}$ داده شده است. ماتریس A^{-1} را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	در تساوی $[x \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}=0$ ، مقدار x را بیابید.	۱/۲۵
۴	اگر $3A=\begin{bmatrix}\lvert A\rvert & -5\\ 1 & 4\lvert A\rvert\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\lvert A^{-1}\rvert$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۵	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx+9y=m+1\\ 4x+my=-4\end{cases}$ جواب <u>نداشته باشد</u>.	۱/۲۵
	فصل دوم	
۶	**الف)** اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آن‌گاه سطح مقطع حاصل یک .... است. **ب)** در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت. (درست ـ نادرست)	۰/۵
۷	نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)	۱
۸	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط $3x+4y+6=0$ وتری به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید.	۱/۵
۹	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ و $x^2+y^2+6x+2y-6=0$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائهٔ راه‌حل)	۱/۲۵
۱۰	در یک بیضی با کانون‌های F و F′، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ را به دست آورید.  	۱/۲۵
۱۱	معادلهٔ سهمی با کانون $F(1,2)$ و خط هادی $x=-3$ را بنویسید.	۱/۵
۱۲	در شکل مقابل، نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F′ مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F′ خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF'=MF'$.  	۱
	فصل سوم	
۱۳	**الف)** نقطهٔ $(-2,3,-1)$ در ناحیهٔ ششم مختصاتی قرار دارد. (درست ـ نادرست) **ب)** حاصل $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}$ برابر .... است.	۰/۵
۱۴	مقدار m را طوری بیابید که زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(m,0,2)$ و $\vec{b}=(2,-2,0)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد.	۱/۵
۱۵	اگر $\vec{a}=(2,-1,1)$ ، $\vec{b}=(-1,2,0)$ و $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $2\vec{c}-\vec{b}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	اگر $\vec{a}=(-2,0,1)$ و $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.	۱
۱۷	اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-1,1)$ ، $\vec{b}=(1,-1,1)$ و $\vec{c}=(1,m,-1)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.	۱/۵
	موفق باشید جمع نمرات	۲۰

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- A

۲- الف) درست؛ خاصیت توزیع‌پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست؛ زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست؛ زیرا $|A| = 12 - 12 = 0$. می‌دانیم شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

ت) درست؛ دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. $1 \le i, j \le 3$.

$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5$ $a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8$

$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11$ $a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7$

$a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10$ $a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13$

$a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$ $a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$

$a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یعنی:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 15 = 30$$

۴- A^2 یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$4A$ یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

I_3 ماتریس همانی مرتبهٔ 3×3، $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است و $5I_3$ برابر است با $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

در نتیجه:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیربه‌نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۵- برای دو ماتریس غیرصفر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$،

حاصل‌ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

یعنی ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر بشود.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^4| = |A|^4$. هم‌چنین $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه:

$$|A^4| - 4|A^{-1}| + 3 = |A|^4 - 4 \times \frac{1}{|A|} + 3$$

$$= (-2)^4 - 4 \times \frac{1}{-2} + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$$

۷-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{درایه‌ها}]{\text{جمع نظیربه‌نظیر}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

۸- ساروس:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right|$$

$$= (+2 + 60 + 70) - (-28 + 15 - 20) = 132 - (-33) = 132 + 33 = 165$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = -13 + 90 + 88 = 165$$

۹- برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند یعنی:

$$\underbrace{\frac{2}{a} = \frac{3}{-1}} = \frac{4}{2a}$$

از حل تناسب اول داریم: $3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

با جای‌گذاری $a = -\frac{2}{3}$، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{2}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2(-\frac{2}{3})} \Rightarrow -3 = -3 = -3$$

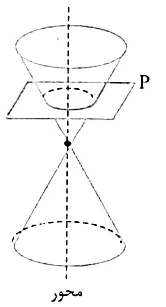
بنابراین به ازای $a = -\frac{2}{3}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین کسرها برقرار نمی‌شد، آن‌گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a، دارای بی‌شمار جواب نبود.)

۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

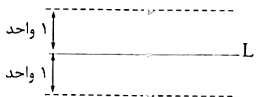
ب) $a^2 + b^2 > 4c$

پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

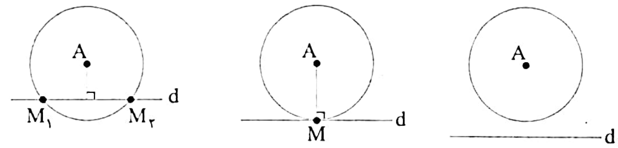
۱۱- دایره



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند.



۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطهٔ تماس، نقطهٔ مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.

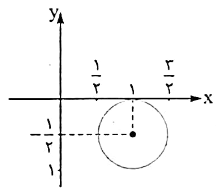


(مسئله جواب ندارد.) (M تنها جواب مسئله است.) (M_1 و M_2 دو جواب مسئله هستند.)

۱۴- الف) ابتدا معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم، در پرانتز دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$4(x-1)^2+4(y+\frac{1}{2})^2=1 \xrightarrow{\div 4} (x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

ریشهٔ داخل پرانتزها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.



$$O(1,-\frac{1}{2}) \ , \ R=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

ب) $S_{دایره}=\pi R^2=\pi(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{4}$

۱۵- xها را کنار هم و yها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پرانتز را مربع کامل می‌کنیم:

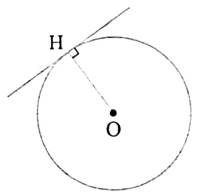
$$(x^2+2x)+(y^2-4y)=0 \Rightarrow (\underbrace{x^2+2x+1}_{اتحاد}-1)+(\underbrace{y^2-4y+4}_{اتحاد}-4)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$$

ریشهٔ داخل پرانتزها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 \Rightarrow y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow O(-1,2) \ , \ R=\sqrt{5}$$

۱۶- برای این‌که خط بر دایره مماس شود، باید فاصلهٔ خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH=R$.



$$2x^2+2y^2-3x+y=0 \xrightarrow{\div 2} x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=0$$

$$O=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})=(-\frac{-\frac{3}{2}}{2},-\frac{\frac{1}{2}}{2})=(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-0}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$OH=\text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط}=\frac{|3(\frac{3}{4})-\frac{1}{4}-a|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|2-a|}{\sqrt{10}}$$

باید $\frac{|2-a|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$، پس: $|2-a|=\frac{10}{4}$؛ در نتیجه $|2-a|=\frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a=\frac{5}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ 2-a=-\frac{5}{2} \Rightarrow a=\frac{9}{2} \end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایرهٔ اول:

$$x^2+y^2-2x+4y-1=0$$

قرینهٔ نصف ضریب x و ضریب y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O=(-\frac{(-2)}{2},-\frac{4}{2})=(1,-2)$$

هم‌چنین شعاع دایرهٔ اول برابر است با: $R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\sqrt{6}$

برای دایرهٔ دوم نیز داریم: $O'(-\frac{4}{2},-\frac{2}{2})=(-2,-1)$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{16+4-4}=2$$

اکنون طول پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(1+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{10}$$

چون $\sqrt{6}-2<\overbrace{OO'}^{\sqrt{10}}<2+\sqrt{6}$ $(|R-R'|<OO'<R+R')$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- الف) حاصل‌ضرب $A\times B$ زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A (n) با تعداد سطرهای B (۲) برابر باشد و مرتبهٔ $A\times B$ از حذف این مقدار مساوی حاصل می‌شود؛ در نتیجه $n=2$ و مرتبهٔ $A\times B$ برابر 4×3 است.

ب) $|A|=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

پ) صفر (کافی است برای به دست آوردن دترمینان، از بسط این سطر استفاده کنیم، آن‌گاه واضح است که مقدار دترمینان صفر است.)

۲- الف) درست

ب) نادرست؛ (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها لزوماً برقرار نیست.)

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. طبق فرض در ماتریس A، $i=1,2$ و $j=1,2,3$ هستند.

$$\text{طبق فرض:}\ \left.\begin{array}{ll} a_{11}=1^2+1=2 \ , & a_{12}=1+2-1=2 \\ a_{13}=1+3-1=3 \ , & a_{21}=2-1=1 \\ a_{22}=2^2+1=5 \ , & a_{23}=2+3-1=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس B، $i=1,2,3$ و $j=1,2$ هستند.

$$\left.\begin{array}{ll} b_{11}=2(1)-1=1 \ , & b_{12}=1+2=3 \\ b_{21}=2^2-1=3 \ , & b_{22}=2(2)-2=2 \\ b_{31}=3^2-1=8 \ , & b_{32}=3^2-2=7 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 48 & 41 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

۴- $-2A$ یعنی عدد -2 را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$-2A=\begin{bmatrix} -4 & +2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس I را باید $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، پس $3I=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ در نتیجه:

$$-2A-3I=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

درایه‌ها را نظیربه‌نظیر از هم کم می‌کنیم: $-2A-3I=\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

و در آخر: $(-2A-3I)+B=\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

از جمع‌کردن درایه‌های نظیربه‌نظیر داریم: $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ که جواب نهایی عبارت داده شده است.

۵- ابتدا $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} 3 & x \\ y & -2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6+x & -3+x \\ 2y-2 & -y-2 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

ماتریس قطری ۲×۲، ماتریسی است که درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} -۳+x=۰ \Rightarrow x=۳ \\ ۲y-۲=۰ \Rightarrow y=۱ \end{cases} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

۶- می‌دانیم هرگاه ضریب عددی ماتریس بخواهد از دترمینان خارج شود باید به توانِ مرتبهٔ ماتریس برسد و هم‌چنین $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$. در نتیجه:

$$|۳A^{-۱}|=۳^۳|A^{-۱}|=۲۷\times\frac{۱}{|A|}=۲۷\times\frac{۱}{\frac{۳}{۵}}=۲۷\times\frac{۵}{۳}=۹\times۵=۴۵$$

۷- فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارونِ A باشند. ثابت می‌کنیم $B=C$.

طبق فرض: $AB=BA=I$, طبق فرض: $AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B \xlongequal{\text{شرکت‌پذیری}} C(AB)=CI=C \Rightarrow B=C$$

۸- هر دو دترمینان را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۲+۷=۹$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \\ x & ۱ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ساروس}} (-۲+۲x+۱۴)-(-۷x+۱+۸)$$

$$=۱۲+۲x+۷x-۹=۹x+۳ \Rightarrow a+۹x=۹x+۳ \Rightarrow a=۳$$

۹- برای این‌که یک دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد باید دترمینان ضرایب، مخالف صفر شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۲-۳=-۵\neq۰$$

اکنون فرم ماتریسی دستگاه را تشکیل می‌دهیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow X=A^{-۱}B$$

اما:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

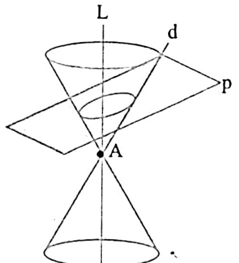
$$\Rightarrow X=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۵ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۱۰- الف) درست

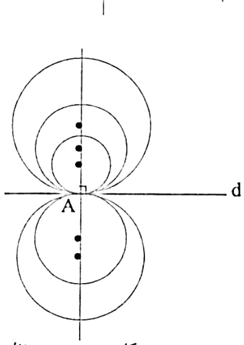
ب) نادرست؛ زیرا: $۴x^۲+۴y^۲-۸x+۱۲y-۳=۰$

$$\xrightarrow{\div۴} x^۲+y^۲-۲x+۳y-\frac{۳}{۴}=۰ \Rightarrow O=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(۱,-\frac{۳}{۲})$$

۱۱- بیضی.

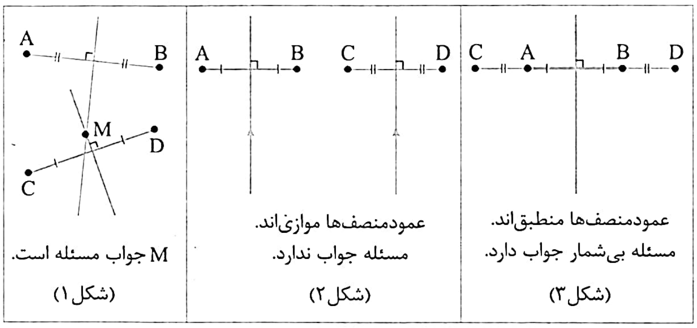


۱۲- خط d و نقطهٔ A را روی آن در نظر می‌گیریم. مرکزِ تمام دایره‌هایی که در نقطهٔ A بر خط d مماس‌اند، روی یک خط عمود بر خط d در نقطهٔ A قرار می‌گیرند.
(دقت کنید که خود نقطهٔ A روی خط عمود جزء جواب نیست).

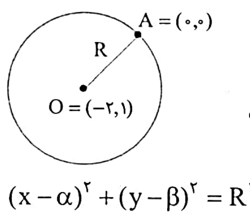


مکان هندسی موردنظر

۱۳- مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط AB است و به طریق مشابه مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است.
اکنون اگر عمودمنصف‌های CD و AB متقاطع باشند، محل تقاطع، نقطهٔ مطلوب است و مسئله یک جواب دارد. (شکل ۱)
اگر عمودمنصف‌های CD و AB موازی باشند، مسئله جواب ندارد. (شکل ۲)
اگر عمودمنصف‌های CD و AB منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد. (شکل ۳)



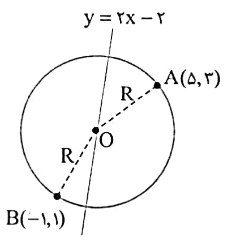
۱۴- با توجه به شکل مقابل فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطهٔ A همان شعاع دایره است.



$$\text{شعاع}=OA=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

معادلهٔ کلی دایره به مرکز (α,β) و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است. بنابراین داریم: $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۵$

۱۵- برای مشخص‌کردن داده‌های مسئله یک شکل مناسب رسم می‌کنیم:
نقطهٔ O روی خط است پس مختصات آن به صورت $O=(\alpha,۲\alpha-۲)$ است. از طرفی $OA=OB=\text{شعاع}=R$. در نتیجه:



$$\sqrt{(\alpha-۵)^۲+(۲\alpha-۵)^۲}=\sqrt{(\alpha+۱)^۲+(۲\alpha-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^۲}-۱۰\alpha+۲۵+\cancel{۴\alpha^۲}-۲۰\alpha+۲۵=\cancel{\alpha^۲}+۲\alpha+۱+\cancel{۴\alpha^۲}-۱۲\alpha+۹$$

$$\Rightarrow -۳۰\alpha+۵۰=-۱۰\alpha+۱۰ \Rightarrow -۲۰\alpha=-۴۰ \Rightarrow \alpha=۲$$

$$\Rightarrow O=(۲,۲), R=OB=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۱۰$$

۱۶- ابتدا معادلهٔ دایره را به روش مربع کامل استاندارد می‌کنیم:

$$(x^۲+۲x)+y^۲=۱ \Rightarrow (\underbrace{x^۲+۲x+۱}_{\text{اتحاد}}-۱)+y^۲=۱ \Rightarrow (x+۱)^۲+y^۲=۲$$

ریشهٔ داخل پرانتزها، مرکز دایره و جذر عدد ثابت، شعاع دایره است.

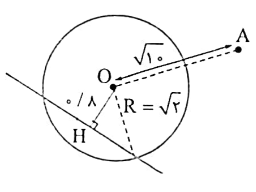
$$\begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow O(-۱,۰), R=\sqrt{۲}$$

فاصلهٔ O تا نقطهٔ $A=(۲,۱)$ را می‌یابیم: $OA=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}$

چون $OA>R$، پس نقطهٔ A خارج دایره قرار دارد. فاصلهٔ O تا خط $۳x+۴y-۱=۰$ برابر است با:

$$OH=\frac{|-۳+۰-۱|}{\sqrt{(۳)^۲+(۴)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

چون $\sqrt{۲}>۰/۸$، پس $R>OH$.
پس خط داده‌شده دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

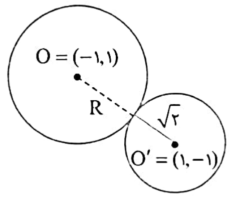


۱۷- مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$O'=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۲}{۲})=(۱,-۱)$$

$$R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۰}=\sqrt{۲}$$

اکنون شکل مناسبی رسم می‌کنیم:



طبق شکل، شعاع دایرهٔ خواسته‌شده برابر است با:

$$R=OO'-\sqrt{۲}$$

اما $OO'=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$، پس $R=\sqrt{۲}$.

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$$

آزمون شمارهٔ ۳ (نوبت اول)

۱- الف) $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۵+۲}=\frac{۱}{۷}$

ب) حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

۲- الف) درست

ب) نادرست؛ (اگر $OO'>r+r'$ دو دایره متخارج‌اند.)

پ) درست؛ (زیرا: $(۱)^۲+(۲)^۲-(۱)(۲)-۴=-۱<۰$)

۳- الف) i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است و $۱\le i,j\le ۳$. در نتیجه:

$a_{۱۱}=۱-۱=۰$ $a_{۱۲}=۱-۲=-۱$

$a_{۱۳}=۱-۳=-۲$ $a_{۲۱}=۱-۲=-۱$

$a_{۲۲}=۲-۲=۰$ $a_{۲۳}=۲-۳=-۱$

$a_{۳۱}=۱-۳=-۲$ $a_{۳۲}=۲-۳=-۱$

$a_{۳۳}=۳-۳=۰$

بنابراین:
$$A=\begin{bmatrix}۰&-۱&-۲\\-۱&۰&-۱\\-۲&-۱&۰\end{bmatrix}$$

ب) برحسب سطر اول، یعنی سطر اول را حذف کرده به ترتیب ستون‌های اول، دوم و سوم را حذف می‌کنیم و سپس سه‌تا دترمینان ۲×۲ محاسبه کرده و آن‌ها را در سطر اول ضرب می‌کنیم. توجه داریم که مقدار دترمینان دوم باید قرینه شود.

$$|A|=۰\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}۰&-۱\\-۱&۰\end{vmatrix}+(-۱)\times(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix}-۱&-۱\\-۲&۰\end{vmatrix}$$

$$+(-۲)\times(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}-۱&۰\\-۲&-۱\end{vmatrix}$$

$$=۰+(۰-۲)-۲(۱-۰)=-۲-۲=-۴$$

۴- قرار می‌دهیم: $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$. در این صورت:

$$AB=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix} \qquad AC=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$$

؛پس $AB=AC=\bar{O}$ اما $B\neq C$.

۵- الف) A و B را به شکل $A=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_۱&y_۱&z_۱\\x_۲&y_۲&z_۲\\x_۳&y_۳&z_۳\end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم.

$$AB=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱&y_۱&z_۱\\x_۲&y_۲&z_۲\\x_۳&y_۳&z_۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax_۱&ay_۱&az_۱\\bx_۲&by_۲&bz_۲\\cx_۳&cy_۳&cz_۳\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}x_۱&y_۱&z_۱\\x_۲&y_۲&z_۲\\x_۳&y_۳&z_۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&b&۰\\۰&۰&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax_۱&by_۱&cz_۱\\ax_۲&by_۲&cz_۲\\ax_۳&cy_۳&cz_۳\end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، برای به دست آوردن AB، سطر اول ماتریس B در درایهٔ $a_{۱۱}$ از ماتریس A، سطر دوم در درایهٔ $a_{۲۲}$ از ماتریس A و سطر سوم در درایهٔ $a_{۳۳}$ از ماتریس A ضرب شده‌اند؛ یعنی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A به ترتیب در سطرهای ماتریس B ضرب شده‌اند.

به همین ترتیب برای به دست آوردن ماتریس BA، درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A به ترتیب در ستون‌های ماتریس B ضرب شده‌اند.

ب) لزوماً برابر نیستند، برای مثال اگر:

$$A\begin{bmatrix}۴&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}\ ,\ B\begin{bmatrix}-۱&۰&۲\\۳&۱&۵\\-۴&-۱&۰\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۴&۰&۸\\۶&۲&۱۰\\-۱۲&-۳&۰\end{bmatrix}\ ,\ B\times A=\begin{bmatrix}-۱&۰&۶\\۱۲&۲&۱۵\\-۱۶&-۲&۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A\times B\neq B\times A$$

پ) اگر A یک ماتریس اسکالر باشد، $A=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\۰&a&۰\\۰&۰&a\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_۱&y_۱&z_۱\\x_۲&y_۲&z_۲\\x_۳&y_۳&z_۳\end{bmatrix}$،

طبق آن‌چه در قسمت (الف) به دست آوردیم:

$$B\times A=A\times B=\begin{bmatrix}ax_۱&ay_۱&az_۱\\ax_۲&ay_۲&az_۲\\ax_۳&ay_۳&az_۳\end{bmatrix}$$

یعنی تنها کافی است عدد روی قطر اصلی را در تمام درایه‌های B ضرب کنیم و اگر A اسکالر باشد $AB=BA$ است.

۶- ابتدا ماتریس $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

اکنون به کمک خواص توان، کافی است توان‌های ۴ و ۷ را تشکیل دهیم:

$$A^۴=(A^۲)^۲=I^۲=I \qquad A^۷=A^۶\times A=(A^۲)^۳\times A=I^۳\times A=I\times A=A$$

$$\Rightarrow\ A^۷-A^۴=A-I=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۳\end{bmatrix}$$

۷- در ماتریس‌های ۲×۲: $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، دترمینان A برابر است با $|A|=ad-bc$.

بنابراین:
$$|A|=|A|(|A|+۳)-۴\times۲$$

قرار می‌دهیم $|A|=x$، در نتیجه: $x=x(x+۳)-۸\ \Rightarrow\ x=x^۲+۳x-۸$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۸=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\x=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|A|=-۴\\|A|=۲\end{cases}$$

۸- ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم: $|A|=۴-۶=-۲$

$$\Rightarrow\ A^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&\frac{۳}{۲}\\۱&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

برای امتحان‌کردن جواب باید $A^{-۱}A=AA^{-۱}=I$ شود:

$$AA^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&\frac{۳}{۲}\\۱&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

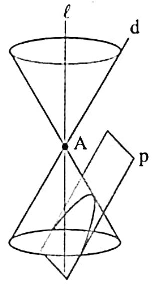
$$A^{-۱}A=\begin{bmatrix}-۲&\frac{۳}{۲}\\۱&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

۹- باید نسبت ضرایب با هم برابر بوده ولی با نسبت اعداد ثابت برابر نباشد یعنی:

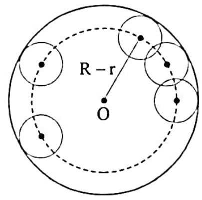
$$\frac{1}{m}=\frac{m}{4}\neq\frac{1}{-2} \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

اما به ازای $m=-2$ هر سه کسر با هم برابر می‌شوند (حالت بی‌شمار جواب)، پس فقط $m=2$ قابل قبول است.

۱۰- سهمی

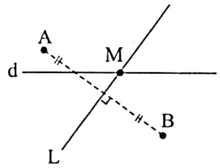


۱۱- دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر می‌گیریم. دایره‌هایی کوچک‌تر با شعاع r داخل آن رسم می‌کنیم که از داخل بر دایرهٔ اولیه مماس باشند. مرکز این دایره‌های کوچک، روی دایرهٔ جدیدی به مرکز O و شعاع $R-r$ قرار می‌گیرند.

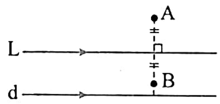


۱۲- نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB را تشکیل می‌دهند. اگر عمودمنصف AB را رسم کنیم و آن را L بنامیم سه حالت ممکن است رخ دهد:

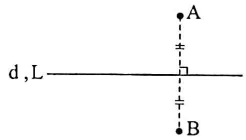
الف) خط L و d متقاطع‌اند. محل تقاطع نقطهٔ M تنها جواب مسئله است.



ب) خط L و d موازی‌اند. مسئله جواب ندارد. خط L پاره‌خط AB را نصف می‌کند.



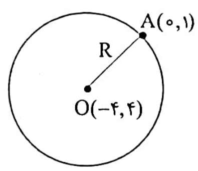
پ) خط L و d منطبق‌اند. مسئله بی‌شمار جواب دارد.



۱۳- می‌دانیم محل برخورد قطرها در دایره، مرکز دایره را مشخص می‌کند. با اختصاص $m=1$ و $m=2$ محل برخورد دو قطر مشخص می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l} m=1 \Rightarrow -x=4 \Rightarrow x=-4 \\ m=2 \Rightarrow y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow O=(-4,4)$$

نقطهٔ $A=(0,1)$ روی دایره است، پس طبق شکل OA شعاع دایره است.

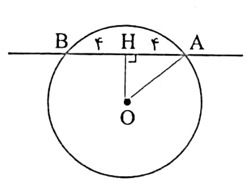


$$R=OA=\sqrt{(-4-0)^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x+4)^2+(y-4)^2=25$$

۱۴- طبق شکل داریم:

$$OH=\frac{|0+0-15|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$



می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند. پس $BH=HA=4$. لذا طبق فیثاغورس در مثلث OAH:

$$OA^2=OH^2+HA^2$$

$$OA^2=9+16=25 \Rightarrow OA=5$$

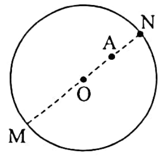
اما OA همان شعاع دایره است، پس $R=5$.

$$\text{معادلهٔ دایره}: (x-0)^2+(y-0)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2=25$$

۱۵- مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$O=(0,0) \quad , \quad R=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \quad , \quad OA=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

چون $OA<R$ پس نقطهٔ A داخل دایره قرار دارد.



طبق شکل AN کم‌ترین فاصله و AM بیشترین فاصله است.

$$AN=ON-OA=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

$$AM=OM+OA=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

۱۶- برای این‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید $OO'=R+R'$.

در دایرهٔ اول:

$$\begin{cases} O=(-\frac{-2}{2},-\frac{-2}{2})=(1,1) \\ R=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4a}=\frac{1}{2}\sqrt{8-4a}=\sqrt{2-a} \end{cases}$$

در دایرهٔ دوم:

$$\begin{cases} O'=(-\frac{(-8)}{2},\frac{-(-2)}{2})=(4,1) \\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{64+4-64}=1 \end{cases}$$

اما:

$$OO'=\sqrt{(1-4)^2+(1-1)^2}=3$$

$$\sqrt{2-a}+1=3 \Rightarrow \sqrt{2-a}=2 \Rightarrow 2-a=4 \Rightarrow a=-2$$

آزمون شمارهٔ ۴ (نوبت اول)

۱- الف) درست؛ برای محاسبهٔ توان ماتریس قطری کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

ب) نادرست؛ قانون حذف در ماتریس‌ها لزوماً برقرار نیست.

پ) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $|A|=18-20=-2$

ت) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

$$|A|=-1\times 2\times 3=-6$$

۲- از توان ۲ شروع می‌کنیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

پس $A^2=I$. اکنون به کمک قوانین توان، A^{10} را می‌سازیم:

$$A^{10}=(A^2)^5=I^5=I$$

(توان روی ماتریس همانی، بی‌تأثیر است. یعنی ماتریس همانی به توان هر عددی برسد، باز هم همانی می‌شود.)

۳- الف) $(A+B)^2$ یعنی $A+B$ را در خودش ضرب کنیم:

$$(A+B)(A+B)=A\times A+A\times B+B\times A+B\times B=A^2+AB+BA+B^2$$

طبق فرض $AB=BA$؛ پس:

$$(A+B)^2=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$$

ب)

$$(A-B)(A+B)=A\times A+A\times B-B\times A-B\times B$$

$$=A^2+AB-BA-B^2$$

اما $AB=BA$؛ پس: $(A-B)(A+B)=A^2+\cancel{BA}-\cancel{BA}-B^2=A^2-B^2$

۴- A^{-1}، وارون ماتریس A است، پس $A^{-1}A=I$.

اکنون از طرفین دترمینان می‌گیریم: $|A^{-1}A|=|I|$

دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی باز می‌شود و $|I|=1$، پس:

$$|A^{-1}||A|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

۵- ابتدا نشان می‌دهیم $|kI|=k^3$:

$$kI=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

می‌دانیم دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

$$|kI|=(k)(k)(k)=k^3$$

اکنون داریم:

$$|kA|=|k(IA)|=|(kI)A|=|kI||A|=k^3|A|$$

۶- در حالت کلی، اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ که $|A|=ad-bc$.

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=2-(-3)=5 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}$$

از طرفی $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ و $\beta I=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$. همچنین $\alpha A=\begin{bmatrix}2\alpha&\alpha\\-3\alpha&\alpha\end{bmatrix}$؛ در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha&\alpha\\-3\alpha&\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha+\beta&\alpha\\-3\alpha&\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{5}\\2\alpha+\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow 2(-\frac{1}{5})+\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\beta=\frac{3}{5}\end{cases}$$

۷- طبق فرض $|A|=|A^{-1}|$ اما می‌دانیم $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$؛ در نتیجه:

$$|A|=\frac{1}{|A|}\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$$

حال دترمینان ماتریس A را به روش ساروس محاسبه کرده و برابر ±1 قرار می‌دهیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2&m&2&2&m\\m&0&0&m&0\\1&1&1&1&1\end{array}\right.=(0+0+2m)-(0+0+m^2)=2m-m^2$$

$$2m-m^2=\pm1\Rightarrow\begin{cases}m^2-2m+1=0\Rightarrow(m-1)^2=0\Rightarrow\boxed{m=1}\\m^2-2m-1=0\Rightarrow\Delta=4+4=8\\\Rightarrow\boxed{m=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}}\end{cases}$$

۸- ابتدا معادلهٔ اول را ساده می‌کنیم:

$$mx-3x-m+3y=0\Rightarrow(m-3)x+3y=m$$

برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند.

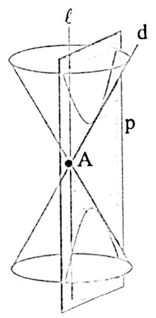
$$\frac{m-3}{4}=\frac{3}{m+1}=\frac{m}{2}$$

از طرفین وسطین کردن دو کسر اول داریم: $m^2-2m-3=12$

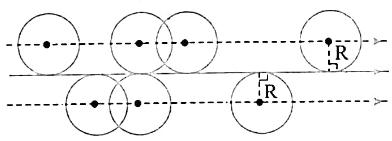
و در نتیجه: $m^2-2m-15=0\Rightarrow m=5\,,\,m=-3$

اما به ازای $m=5$ فقط دو کسر اول با هم برابرند و به ازای $m=-3$ مقدار هر سه کسر برابر $-\frac{3}{2}$ است، پس به ازای $m=-3$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۹- هذلولی

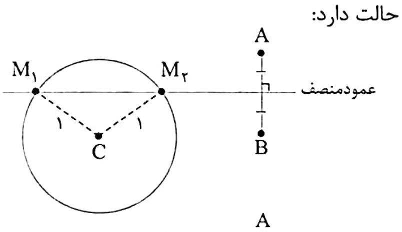


۱۰- خط d را در صفحه در نظر می‌گیریم. مرکز تمام دایره‌هایی که شعاع آن‌ها R باشند و بر خط d مماس باشند در دو طرف خط d تشکیل دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R از آن را می‌دهند.

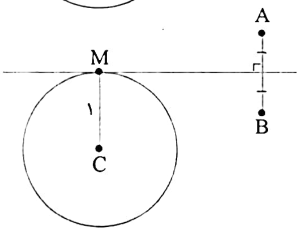


۱۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است. هم‌چنین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۱ واحد باشد دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۱ واحد است. محل برخورد عمودمنصف AB و این دایره جواب مسئله است که سه حالت دارد:

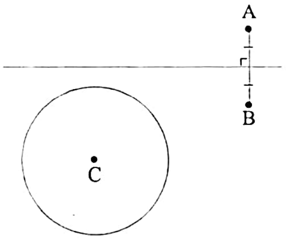
الف) عمودمنصف AB دایره را در دو نقطه قطع کند. در این حالت مسئله دو جواب دارد. (M_1 و M_2)



ب) عمودمنصف AB بر دایره مماس باشد. در این حالت مسئله یک جواب دارد. (M)



پ) عمودمنصف AB دایره را قطع نکند. در این حالت مسئله جواب ندارد.



۱۲- الف) کافی است نقاط داده‌شده را در معادلهٔ کلی دایره جای‌گذاری کنیم:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\xrightarrow{A=(0,0)}0+0+0+0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$\xrightarrow{B=(1,1)}1+1+a+b+0=0\Rightarrow a+b=-2$$

$$\xrightarrow{C=(0,1)}0+1+0+b+0=0\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-y+0=0$$

ب) $O=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\,,\quad R=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2-4(0)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- نقاطی مانند $M=(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرض:

$$\begin{cases}M=(x,y)\\A=(1,2)\\B=(2,3)\end{cases}\Rightarrow AM=\frac{1}{2}BM$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=\frac{1}{4}(x^2-4x+4+y^2-6y+9)$$

$$4(x^2-2x+1+y^2-4y+4)=x^2-4x+4+y^2-6y+9$$

$$\Rightarrow4x^2-8x+4+4y^2-16y+16=x^2-4x+4+y^2-6y+9$$

$$\Rightarrow3x^2+3y^2-4x-10y+7=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}y+\frac{7}{3}=0$$

$$a^2+b^2-4c=(\frac{-4}{3})^2+(\frac{-10}{3})^2-4(\frac{7}{3})=\frac{116-84}{9}=\frac{32}{9}>0$$

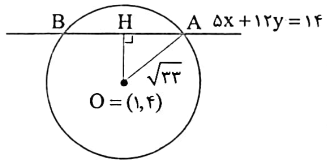
پس مکان هندسی مورد نظر یک دایره است.

۱۴- ابتدا مرکز و شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$O=(-\frac{-2}{2},-\frac{-8}{2})=(1,4)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{4+64+64}=\frac{1}{2}\sqrt{132}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{33}=\sqrt{33}$$

با توجه به شکل داریم:



فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، یعنی OH را می‌یابیم:

$$OH = \frac{|۵+۴۸-۱۴|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}} = \frac{۳۹}{۱۳} = ۳$$

اکنون قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث $\overset{\Delta}{OAH}$ به کار می‌بریم:

$$OA^۲ = OH^۲+HA^۲ \Rightarrow ۳۳ = ۹+HA^۲ \Rightarrow HA^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow HA = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow AB = ۲(۲\sqrt{۶}) = ۴\sqrt{۶}$$

۱۵- در معادلهٔ کلی دایره: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

شعاع برابر است با: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

مقدار زیر رادیکال باید مثبت باشد، پس: $a^۲+b^۲-۴c>۰$

با توجه به معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$۱۶+۳۶-۴(m)>۰ \Rightarrow -۴m>-۵۲ \Rightarrow m<\frac{۵۲}{۴}=۱۳ \Rightarrow m<۱۳$$

آزمون شمارهٔ ۵ (نوبت دوم)

۱- الف) چون ماتریس اسکالر است پس $f=e=c=۰$ و $a=b=۲$:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۸$$

ب) $|A|\neq ۰$

پ) $a_{۳۲} = \frac{۲(۳)}{۲-۱} = \frac{۶}{۱} = ۶$

۲- الف) درست

ب) درست

پ) درست: زیرا: $(A+I)^۲ = A^۲+۲A+I = A+۲A+I = ۳A+I$

۳- چون A قطری است پس درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \quad , \quad n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۴- $۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |۲A| = |A|^۲+۴$

$$\xrightarrow{A_{۲\times۲}} ۲^۲|A| = |A|^۲+۴ \Rightarrow |A|^۲-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow (|A|-۲)^۲=۰ \Rightarrow |A|=۲ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{۲}$$

۵- $\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳+۸ = ۱۱ \neq ۰$$

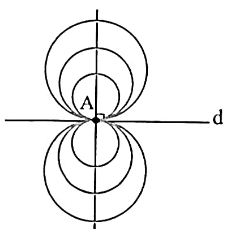
پس دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد. $A^{-۱} = \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱}\times\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱۱ \\ -۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۶- خط

۷-

الف) نادرست



یک خط عمود به‌جز خود A

ب) درست

۸- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است. (d) (۰/۲۵)

مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط CD است. (d') (۰/۲۵)

وضعیت دو خط را نسبت به هم بررسی می‌کنیم:

$d \parallel d'$: مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)

d و d' بر هم منطبق‌اند: مسئله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۲۵)

d و d' متقاطع‌اند: مسئله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

۹- فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است. $O=(۲,۱)$

$۳x+۴y+۵=۰$ (خط مماس)

$$R = \frac{|۶+۴+۵|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \xrightarrow{\text{معادله}} (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$$

۱۰- مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ برابر است با:

$$O(\frac{۶}{۲},\frac{۲}{۲})=(۳,۱)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱$$

مرکز و شعاع دایرهٔ دوم:

$O'(۰,۰)$

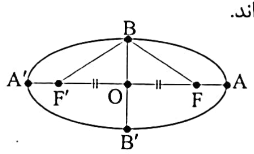
$R'=۱$

$OO'=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$

$R+R'=۲$

$R-R'=۰$

$OO'>R+R'$ ($\sqrt{۱۰}>۲$) پس دو دایره متخارج‌اند.



۱۱- نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' است پس فاصلهٔ B از دو سر پاره‌خط $F'F$ یکسان است.

$\Rightarrow BF=BF'$

از طرفی B روی بیضی است پس طبق تعریف بیضی: $BF+BF'=۲a$

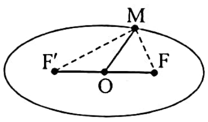
در نتیجه $BF=BF'=a$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{BOF}$ داریم:

$OB=b$

$OF=c \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BF^۲=OB^۲+OF^۲ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲$

$BF=a$



۱۲- الف) قطر بزرگ $=۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵$

قطر کوچک $=۲b=۶ \Rightarrow b=۳$

در بیضی $a^۲=b^۲+c^۲$ پس:

$$c^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow c=۴$$

یعنی $OF=OF'=۴$.

از طرفی طبق فرض $OM=۴$؛ در نتیجه: $OM=OF=OF'=۴$

پس OM نقش میانهٔ وارد بر FF' را دارد و نصف آن طول دارد. پس مثلث در رأس M قائمه است.

ب) $MF+MF'=۲a=۱۰ \Rightarrow MF'=۱۰-MF$

$$\xrightarrow[\text{مثلث}]{\text{فیثاغورس در}} FF'^۲=MF^۲+MF'^۲ \Rightarrow ۸^۲=MF^۲+(۱۰-MF)^۲$$

قرار می‌دهیم: $MF=x$

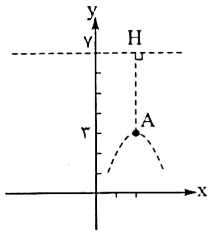
$$\Rightarrow ۶۴=x^۲+(۱۰-x)^۲ \Rightarrow ۶۴=x^۲+۱۰۰-۲۰x+x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۶=۰ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۸=۰$$

$$\Delta=۱۰۰-۷۲=۲۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{۲۸}=۲\sqrt{۷}$$

$$x=\frac{۱۰\pm۲\sqrt{۷}}{۲}=۵\pm\sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} MF=۵-\sqrt{۷} \\ MF'=۵+\sqrt{۷} \end{cases}$$

۱۳- الف) رأس سهمی $A(۲,۳)$ و خط هادی $y=۷$ را رسم می‌کنیم.
طبق شکل سهمی قائم و دهانهٔ سهمی رو به پایین است.
فاصلهٔ رأس تا خط هادی ۴ واحد است پس $a=-۴$.



$$(x-۲)^۲=۴(-۴)(y-۳)$$

ب) $F(۲,۳-۴)=(۲,-۱)$

۱۴- ششم

۱۵- نادرست $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos\theta<۰$

$$\Rightarrow \vec a.\vec b=\underbrace{|\vec a|}_{+}\underbrace{|\vec b|}_{+}\underbrace{\cos\theta}_{-}<۰ \Rightarrow \vec a\cdot\vec b<۰$$

۱۶- الف) $b=-۳$ ب) محور z ها

پ) در صفحهٔ yoz، $x=۰$ است پس: $A(۰,۲,۳)$ $B(-۴,۶,-۳)$

$$\text{مختصات وسط } AB=(\frac{۰-۴}{۲},\frac{۲+۶}{۲},\frac{۳-۳}{۲})=(-۲,۴,۰)$$

۱۷- $\vec a'=\frac{\vec a.(\vec b+\vec c)}{|\vec b+\vec c|^۲}(\vec b+\vec c)$

$$(\vec b+\vec c)=(۲,-۳,۶)$$
$$\vec a.(\vec b+\vec c)=(۱,-۳,۴).(۲,-۳,۶)=۲+۹+۲۴=۳۵$$
$$|\vec b+\vec c|^۲=(\sqrt{۴+۹+۳۶})^۲=۴۹$$
$$\vec a'=\frac{۳۵}{۴۹}(\vec b+\vec c)=\frac{۵}{۷}(\vec b+\vec c)=\frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)=(\frac{۱۰}{۷},\frac{-۱۵}{۷},\frac{۳۰}{۷})$$

۱۸- $\vec a+\vec b+\vec c=\vec o \Rightarrow |\vec a+\vec b+\vec c|=۰ \Rightarrow |\vec a+\vec b+\vec c|^۲=۰$

$$\Rightarrow (\vec a+\vec b+\vec c)\cdot(\vec a+\vec b+\vec c)=۰$$
$$\Rightarrow |\vec a|^۲+|\vec b|^۲+|\vec c|^۲+۲(\vec a.\vec b+\vec b.\vec c+\vec c.\vec a)=۰$$
$$\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec a.\vec b+\vec b.\vec c+\vec c.\vec a)=۰ \Rightarrow \vec a.\vec b+\vec b.\vec c+\vec c.\vec a=-\frac{۱۴}{۲}=-۷$$

۱۹- $\vec a\times\vec b=\vec o \Leftrightarrow |\vec a\times\vec b|=۰$

$$\Leftrightarrow |\vec a||\vec b|\sin\theta=۰ \xleftrightarrow{|\vec a|,|\vec b|\neq ۰} \sin\theta=۰$$
$$\Leftrightarrow \theta=۰ \text{ یا } \pi \Leftrightarrow \vec a\parallel\vec b$$

۲۰- الف) بردار عمود بر دو بردار $-۲\vec b$ و $\vec c$ برابر است با ضرب خارجی آن‌ها:

$$(-۲\vec b)\times\vec c=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ ۲&-۲&۰\\ ۲&۱&-۲\end{vmatrix}=(۴,۴,۶)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ برابر است با:

$$V=|\vec a.(\vec b\times\vec c)|$$

اولاً: $\vec b\times\vec c=-\frac{۱}{۲}(-۲\vec b)\times\vec c=-\frac{۱}{۲}(۴,۴,۶)=(-۲,-۲,-۳)$

ثانیاً: $\vec a.(\vec b\times\vec c)=-۴-۶-۳=-۱۳ \Rightarrow V=|-۱۳|=۱۳$

آزمون شمارهٔ ۶ (نوبت دوم)

۱- قطری

۲- نادرست؛ اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۳- $A\times B=\begin{bmatrix}۴&a\\ b&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\ ۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\ b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}$

AB قطری است پس درایه‌های خارج قطر اصلی صفر است.

$$-۸+۲a=۰ \Rightarrow a=۴$$
$$b-۳=۰ \Rightarrow b=۳$$

۴- الف) خیر، زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

ب) $A\times B=\begin{bmatrix}-۱&۱\\ ۰&۲\\ -۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\ -۲&۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳&۴&-۲\\ -۴&۶&-۴\\ -۸&۱۱&-۶\end{bmatrix}$

$$|A\times B|=\left|\begin{matrix}-۳&۴&-۲\\ -۴&۶&-۴\\ -۸&۱۱&-۶\end{matrix}\right|\begin{matrix}-۳&۴\\ -۴&۶\\ -۸&۱۱\end{matrix}$$

$$=(۱۰۸+۱۲۸+۸۸)-(۹۶+۱۳۲+۹۶)=۳۲۴-۳۲۴=۰$$

۵- $A^{-1}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\ ۲&۳\end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}|=۶+۲=۸$

$$(A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳&۱\\ -۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۸}&\frac{۱}{۸}\\ -\frac{۱}{۴}&\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

۶- $\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳} \Rightarrow m^۲-m=۲$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow \begin{matrix}m=-۱\\ m=۲\end{matrix}$$

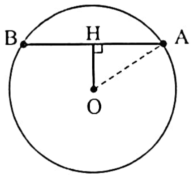
که هر دو مقدار m قابل قبول است.

۷- الف) مشترک ب) پاره‌خط

۸- الف) نادرست؛ فصل‌مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

ب) نادرست؛ زیرا مختصات $(۲,-۳)$ در معادلهٔ دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x=۰$ صدق نمی‌کند.
$۹+۴+۶\neq۰$

۹- از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم. عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$OH=\frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow OA^۲=OH^۲+AH^۲ \Rightarrow OA^۲=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\sqrt{۲})^۲=\frac{۱۰}{۴}=R^۲$$
$$\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱۰}{۴}$$

۱۰- مرکز دایره برابر است با $O(۱,۱)$. شیب خط عمود بر دایره در نقطهٔ $A(۲,۳)$ برابر است با: $m_{AO}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

شیب خط مماس بر دایره در نقطهٔ $A(۲,۳)$ قرینه و معکوس شیب خط عمود است.

$$m'=-\frac{۱}{m_{OA}}=-\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس بر دایره برابر است با: $y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$

۱۱- نقطهٔ A و A' روی بیضی قرار دارند. بنا به تعریف بیضی داریم:

$$A'F'+A'F=۲a$$
$$AF'+AF=۲a$$

در نتیجه: $A'F'+A'F=AF'+AF$

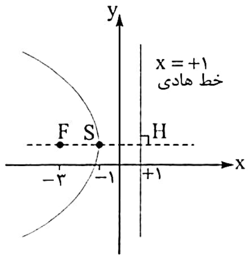
$$\Rightarrow A'F'+(A'F'+FF')=(AF+FF')+AF \Rightarrow AF=A'F'$$

۱۲- در مثلث $\overset{\Delta}{BOF}$: $\cos O\hat{B}F=\frac{BO}{BF}$

از طرفی $BO=b$ و $BF=a$:

$$\Rightarrow \cos O\hat{B}F=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F=۳۰^\circ \Rightarrow F\hat{B}F'=۲(۳۰^\circ)=۶۰^\circ$$

۱۳- الف و ب)
$$y^2-2y+8x+9=0$$
$$\Rightarrow y^2-2y+1-1+8x+9=0$$



$$\Rightarrow (y-1)^2=-8x-8$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$
$$(y-k)^2=4a(x-h)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} h=-1,k=1 \Rightarrow S(-1,1)\\ 4a=-8 \Rightarrow a=-2\end{cases}$$
$$\Rightarrow F=(-1-2,+1)=(-3,1)$$

سهمی افقی و دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود.

۱۴- yoz

۱۵- درست

۱۶- الف) $A(2,0,0)$ $\quad$ $B(1,0,3)$

ب) $|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

پ) وسط AB $M=(\frac{2+1}{2},\frac{0}{2},\frac{0+3}{2})=(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$

۱۷-
$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$
$$\vec{a}.\vec{b}=(2,-1,2).(1,-1,0)=2+1+0=3$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\vec{a}'=\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{3}{2}(1,-1,0)=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0)$$

۱۸- روش اول
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow 72=3\times 26\times\sin\theta$$
$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{72}{3\times 26}=\frac{12}{13} \Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow (\frac{12}{3})^2+\cos^2\theta=1$$
$$\Rightarrow \cos^2\theta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{5}{13}$$
$$\xrightarrow{\theta<90^\circ} \cos\theta=\frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times 26\times\frac{5}{13}=30$$

روش دوم
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$
$$\Rightarrow 72^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=3^2\times 26^2$$
$$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2=900 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\pm 30 \xrightarrow{\theta<90^\circ} \vec{a}.\vec{b}=30$$

۱۹- باید $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=0$ شود.
$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(3,-3,-3)$$
$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=(0,m,-1).(+3,-3,-3)=0-3m+3=0$$
$$\Rightarrow 3m=3 \Rightarrow m=1$$

آزمون شمارهٔ ۷ (نوبت دوم)

۱- درست

۲- ماتریس

۳- زمانی دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B با هم برابرند که درایه‌های نظیربه‌نظیر آن‌ها یکسان باشند؛ در نتیجه:
$$\begin{cases}2x=3\\ 2x+y=5 \Rightarrow 3+y=5 \Rightarrow y=2,x=\frac{3}{2}\\ z=-2\end{cases}$$

و حاصل $x+2y+3z$ برابر است با: $\frac{3}{2}+4-6=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

۴- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. برای ماتریس ۲×۳، A داریم:
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

هم‌چنین برای ماتریس ۳×۲، B داریم:
$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

ابتدا حاصل‌ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:
$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

اکنون دترمینان ماتریس ۳×۳ حاصل را محاسبه می‌کنیم: (روش ساروس حساب کردیم.)
$$\left|\begin{array}{ccc|cc}4 & 1 & 5 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3\end{array}\right.$$
$$=(12+0-30)-(0-12-6)=-18+18=0$$

۵- ماتریس ضرایب برابر است با:
$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}$$
$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

اکنون A^{-1} را حساب می‌کنیم:
$$|A|=6-4=2$$
$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 10\end{bmatrix}$$

۶-
$$|\,|A|A\,|=|4A|=4^3|A|=4^3\times 4=4^4$$
توجه کنید که وقتی عدد ۴ از دترمینان خارج می‌شود به توان مرتبهٔ ماتریس A می‌رسد.

۷- الف) درست

ب) نادرست؛ بیضی با خروج از مرکز صفر، دایره است.

۸- الف) مشترک $\qquad$ ب) خارج

۹- چون نقطهٔ M روی دایره است پس فاصلهٔ M تا مرکز دایره یعنی OM، برابر شعاع دایره است.
$$\begin{array}{l}O=(2,3)\\ M=(1,1)\end{array} \Rightarrow R=OM=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

معادلهٔ دایره برابر است با:
$$(x-2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{5})^2=5$$

۱۰- ابتدا مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ را پیدا می‌کنیم:
$$O=(-\frac{-2}{2},-\frac{-2}{2})=(1,1)$$

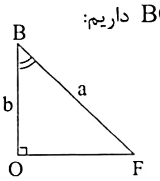
نقطهٔ A روی دایره است و شیب خط گذرا از O و A معکوس و قرینهٔ شیب خط مماس بر دایره در نقطهٔ A است؛ زیرا شعاع OA و خط مماس در نقطهٔ A بر هم عمودند.
$$\text{شیب } OA=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{3-1}{2-1}=2$$
$$\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=\frac{-1}{2}$$

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ A: $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$
$$\Rightarrow 2y-6=-x+2 \Rightarrow x+2y=8$$

۱۱- قطر بزرگ = ۲(قطر کوچک)

$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$

می‌دانیم در بیضی $\begin{cases} BF = a \\ OB = b \end{cases}$ است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF داریم:



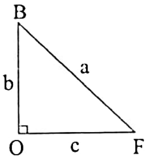
$$\cos\hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow F\hat{B}F' = 2\times 60 = 120$$

۱۲- نقطهٔ B روی بیضی است پس: $BF + BF' = 2a$

از طرفی BB' عمودمنصف FF' است پس فاصلهٔ B از F و F' یکسان است؛ یعنی $BF = BF' = a$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OFB رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$b^2 + c^2 = a^2$$

۱۳- الف) ابتدا به روش مربع کامل کردن، معادلهٔ متعارف سهمی را می‌نویسیم:

$$y^2 - 4y = 2x \Rightarrow y^2 - 4y + 4 - 4 = 2x$$

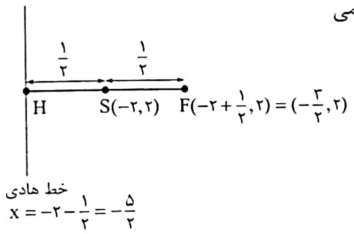
$$\Rightarrow (y-2)^2 = 2x + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = 2(x+2)$$

از مقایسه با معادلهٔ کلی سهمی افقی: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

داریم: $\begin{cases} h = -2 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow$ رأس سهمی $S = (-2,2)$

$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ (پارامتر سهمی)

چون $a > 0$ و متغیر y توان ۲ دارد، پس سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است.



ب) برای یافتن نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات، یک بار $x = 0$ (محل برخورد سهمی با محور yها) و بار دیگر $y = 0$ (محل برخورد سهمی با محور xها) را در سهمی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 + 4y$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y(y-4) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 4$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط برخورد}} (0,0),(0,4)$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{نقطهٔ برخورد}} (0,0)$$

۱۴- نادرست؛ نقطهٔ $(-2,3,-4)$ در ناحیهٔ شمارهٔ ۶ قرار دارد.

۱۵- صفر درجه

۱۶- الف) هر نقطه روی محور xها، عرض و ارتفاع صفر دارد پس $A = (2,0,0)$.
هر نقطه روی صفحهٔ yOz، طول برابر صفر دارد پس $B = (0,-3,4)$.
اکنون مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0-3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}, 2\right)$$

و فاصلهٔ M از مبدأ مختصات $O(0,0,0)$ برابر است با:

$$OM = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

ب) طول قطر مکعب‌مستطیل به طول و عرض و ارتفاع a، b و c برابر است با:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

۱۷- الف) $\vec{a}.\vec{b} = 2\times 1 + (-1)\times(-1) + 2\times 0 = 2 + 1 = 3$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

اما: $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

در نتیجه: $\cos\theta = \frac{3}{3\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

ب) کافی است بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را تشکیل دهیم:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{\text{ساروس}} (0 + 2j - 2k) - (-k - 2i + 0) = 2i + 2j - k = (2,2,-1)$$

۱۸- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$$\Rightarrow 72 = 3\times 26\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{72}{3\times 26} = \frac{12}{13}$$

اما $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ پس: $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

چون θ کم‌تر از قائمه است پس $\cos\theta$ مثبت است و $\cos\theta = \frac{5}{13}$.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 3\times 26\times\frac{5}{13} = 30$$

آزمون شمارهٔ ۸ (نوبت دوم)

۱- الف) ماتریس اسکالر، قطری است و درایه‌های روی قطر یکسان است. در نتیجه:

$$\begin{cases} m = n \\ m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = n = 2$$

ب)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

پ)

$$B^2 = B\times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + 2I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 7 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

۲-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -3 + 1 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5}A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |5A| = -75 + 25 = -50$$

$$\Rightarrow (5A)^{-1} = \frac{1}{-50}\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{-50}\times 5\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه دو طرف عبارت با هم برابرند.

۳- $(A - 3I)^2 = (A - 3I)(A - 3I) = A^2 - 3AI - 3IA + 9I^2$

می‌دانیم I در ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است و توان روی I تأثیری ندارد.

$$\Rightarrow (A - 3I)^2 = A^2 - 3A - 3A + 9I = A^2 - 6A + 9I$$

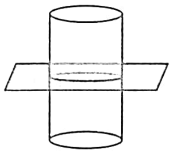
۴-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&1&1&2\\2&6&2&2&6\\1&-1&2&1&-1\end{array}\right|=(12+4-2)-(6-2+8)=14-12=2$$

$$\left|-\frac{1}{2}A^4\right|=(-\frac{1}{2})^3|A|^4=-\frac{1}{8}\times 2^4=\frac{-16}{8}=-2$$

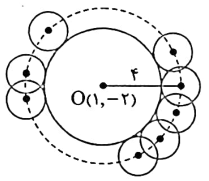
۵- الف) نادرست



جواب درست: دایره

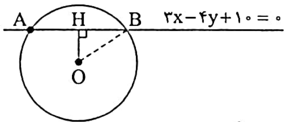
ب) شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ برابر است با: $O=(1,-2)\,,\,R=4$

مکان هندسی خواسته‌شده مطابق شکل زیر است:



شعاع مکان هندسی خواسته‌شده: $4+1=5$

۶- از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم.



عمودِ OH وتر AB را نصف می‌کند.

$AH=BH=3$

به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، OH را محاسبه می‌کنیم:

$$OH=\frac{|6+4+10|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4$$

رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث $\overset{\Delta}{OHB}$ می‌نویسیم:

$$OB^2=OH^2+HB^2$$

$$R^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow R=5$$

معادلهٔ دایره: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$

۷-
$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\Rightarrow (x^2+ax)+(y^2+by)=-c$$

$$\Rightarrow (x^2+ax+\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4})=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4} \Rightarrow O=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$$

$$r=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

۸- نقطهٔ P روی بیضی است. طبق تعریف بیضی:

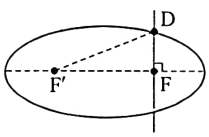
$$PF+PF'=2a$$

$$\sqrt{(4-1)^2+(0-m)^2}+\sqrt{(-2-1)^2+(0-m)^2}=10$$

$$\Rightarrow \sqrt{9+m^2}+\sqrt{9+m^2}=10 \Rightarrow \sqrt{9+m^2}=5 \Rightarrow 9+m^2=25$$

$$\Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

۹-



طبق شکل D روی بیضی است. بنا به تعریف بیضی:

$$DF+DF'=2a$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{DFF'}$ بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$DF^2+FF'^2=DF'^2 \Rightarrow DF^2+(2c)^2=(2a-DF)^2$$

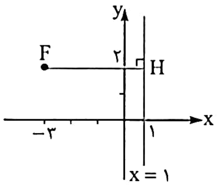
$$\Rightarrow \cancel{DF^2}+4c^2=4a^2+\cancel{DF^2}-4aDF$$

$$\Rightarrow 4aDF=4a^2-4c^2 \Rightarrow DF=\frac{a^2-c^2}{a}$$

از طرفی در بیضی $a^2=b^2+c^2$؛ پس:

$$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow DF=\frac{b^2}{a}$$

۱۰- ابتدا کانون F و خط هادی به معادلهٔ $x=1$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:



از F بر خط هادی عمود کرده، پای عمود را H می‌نامیم. فاصلهٔ FH دو برابر a است. با توجه به شکل، سهمی افقی و دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود. رأس A سهمی نیز وسط FH است.

$$A=\frac{F+H}{2}=(\frac{-3+1}{2},\frac{2+2}{2})=(-1,2)$$

$$FH=4 \Rightarrow 2|a|=4 \Rightarrow |a|=2$$

چون دهانهٔ سهمی به سمت چپ است، پس $a<0$.

$$\Rightarrow a=-2$$

معادلهٔ سهمی: $(y-2)^2=4(-2)(x+1) \Rightarrow (y-2)^2=-8(x+1)$

۱۱-
$$\begin{cases}y^2+7x+5=0\\x^2+y^2=25\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(-7x-5)=25 \Rightarrow x^2-7x-30=0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+3)=0 \Rightarrow x=10\,,\,x=-3$$

اگر $x=-3$ باشد:

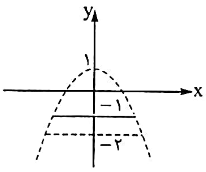
$$(-3)^2+y^2=25 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow (-3,4)\,,\,(-3,-4)$$

اگر $x=10$ باشد: $(10)^2+y^2=25 \Rightarrow y^2=-75$

که غیر قابل قبول است.

۱۲- الف) $z=3$

ب)



۱۳-
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,-1,n)\cdot(1,0,-1)=2+0-n=2-n$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{4+1+n^2}=\sqrt{n^2+5}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

$$\theta=135^\circ \Rightarrow \cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 2-n=\sqrt{n^2+5}\times\sqrt{2}\times-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2-n=-\sqrt{n^2+5} \Rightarrow \sqrt{n^2+5}=n-2$$

$$\Rightarrow \cancel{n^2}+5=\cancel{n^2}-4n+4 \Rightarrow 4n=-1 \Rightarrow n=-\frac{1}{4}$$

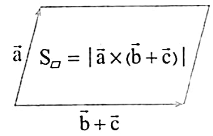
۱۴- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آن‌گاه بردار $\vec{a}$ مضربی از بردار $\vec{b}$ است. $\vec{a}=r\vec{b}$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}'=\frac{r\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{r\cancel{|\vec{b}|^2}}{\cancel{|\vec{b}|^2}}\vec{b}=r\vec{b}=\vec{a} \Rightarrow \vec{a}'=\vec{a}$$

۱۵- الف) $\vec{a}=(2,3,-1)\quad,\quad \vec{b}=(1,0,1)\quad,\quad \vec{c}=(0,2,1)$

$$2\vec{b}-\vec{c}=(2,0,2)-(0,2,1)=(2,-2,1) \Rightarrow |2\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

ب)



$$\vec a\times(\vec b+\vec c)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ ۲ & ۳ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۲\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec i & \vec j\\ ۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{matrix}=(۶\vec i-\vec j+۴\vec k)-(۳\vec k-۲i+۴j)$$

$$=۸\vec i-۵\vec j+\vec k=(۸,-۵,۱)$$

$$S=|\vec a\times(\vec b+\vec c)|=\sqrt{۶۴+۲۵+۱}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) در ماتریس همانی، درایه‌های روی قطر اصلی ۱ و خارج قطر اصلی صفر هستند پس:

$$r=۱, m-۱=۰\Rightarrow m=۱\Rightarrow m+r=۱+۱=۲$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۲)$ از مرکز دایرهٔ $O(۱,-۱)$ برابر است با: $OA=\sqrt{۰+۱}=۱$

و شعاع دایره نیز برابر $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۰}=\sqrt{۲}$ است. چون $OA<R$ پس A **داخل** دایره است.

پ) $V=|a.(b\times c)|=۰$

(شرط هم‌صفحه‌بودن سه بردار)

۲- الف) درست

$$\begin{cases}|۲A|=۲^{۳}|A|=۸\times۵=۴۰\\ A_{۳\times۳}\end{cases}$$

ب) درست

پ) نادرست؛ طبق خاصیت بازتابندگی در بیضی، $\alpha=\beta$. چون $F\hat{M}F'=۵۰$، پس:

$$\alpha+\beta+۵۰=۱۸۰\Rightarrow\alpha+\beta=۱۳۰\Rightarrow\alpha=\beta=۶۵$$

ت) نادرست

$$\vec i\times\vec j=\vec k$$

۳- ابتدا $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم سپس درایه‌های خارج قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۴-

$$AB=\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۳y & ۲x+۴y\\ ۸-۳ & ۶-۴\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۶ & ۴y-۳\\ ۳x+۸ & ۳y-۴\end{bmatrix}$$

طبق فرض $AB=BA$، در نتیجه:

$$۳x+۸=۵\Rightarrow ۳x=-۳\Rightarrow x=-۱$$

$$۳y-۴=۲\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲$$

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ +۱\end{bmatrix}=-۲+۴-۲=۰$$

۵- الف)

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۴ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$$

ب)

$$|B|=\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{vmatrix}\begin{matrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۳\\ ۲ & ۰\end{matrix}$$

$$=(۳۰+۴+۰)-(۰+۰-۵)=۳۴+۵=۳۹$$

۶-

$$\begin{cases}۲x+y=۴\\ ۷x+۴y=۱۵\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۸-۷=۱$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}$$

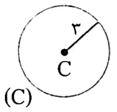
$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}\times B$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$$

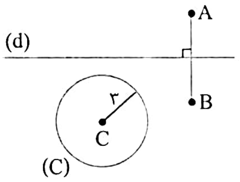
۷- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است (d).

مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.



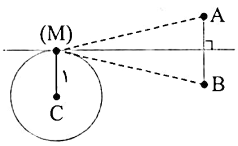
اکنون وضعیت خط d و دایرهٔ (C) را بررسی می‌کنیم:

الف) خط d دایره را قطع نمی‌کند. (مسئله جواب ندارد.)

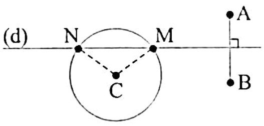


ب) خط d بر دایره مماس است. (پس مسئله یک جواب دارد.)

$$MA=MB, MC=۱$$



پ) خط d دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. (پس مسئله دو جواب دارد.)



$$MA=MB$$
$$NA=NB$$
$$MC=NC=۱$$

۸- چون خط بر دایره مماس است پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع است.

$$R=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^{۲}+(-۴)^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}}(x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$$

۹- مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ صورت سؤال را به دست می‌آوریم:

$$O=(۱,-۱)\quad,\quad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۲}$$

OO' طول خط‌المرکزین دو دایره است:

$$OO'=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

از طرفی طبق فرض دو دایره مماس‌بیرونی هستند؛ پس $OO'=R+R'$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+R'\Rightarrow R'=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}}(x+۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۲$$

۱۰- الف) $۲a=۱۰\Rightarrow a=۵$ $\quad$ $۲b=۶\Rightarrow b=۳$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow c^{۲}=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

خروج از مرکز برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

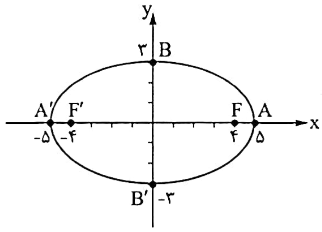
ب) چون بیضی افقی است پس:

$A=(0+a,0)=(5,0) \qquad A'=(0-a,0)=(-5,0)$

$B=(0,0+b)=(0,3) \qquad B'=(0,0-b)=(0,-3)$

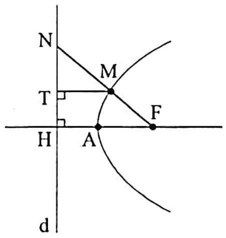
$F=(0+c,0)=(4,0) \qquad F'=(0-c,0)=(-4,0)$

پ)



۱۱- $y^2-2y=8x-9 \Rightarrow \underbrace{y^2-2y+1}-1=8x-9$

$\Rightarrow (y-1)^2=8x-8 \Rightarrow (y-1)^2=8(x-1)$



۱۲- چون M روی سهمی است، پس $MT=MF$.

چون A روی سهمی است، پس $AH=AF$.

از طرفی چون MT و AH هر دو بر خط d عمودند پس با هم موازی‌اند.

قضیهٔ تالس را در $\overset{\Delta}{NHF}$ می‌نویسیم:

$\xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{NM}{MF}=\frac{NT}{TH} \ (1) \qquad \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{NM}{NF}=\frac{MT}{FH} \ (2)$

در تساوی (۲) قرار دهید: $MT=MF$

$\Rightarrow \frac{NM}{NF}=\frac{MF}{FH}$

با جابه‌جایی MF و NF داریم:

$\frac{NM}{MF}=\frac{NF}{FH} \ (3)$

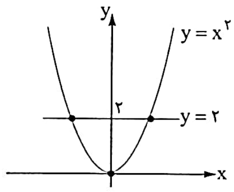
اکنون تساوی (۳) را با تساوی (۱) مقایسه کنید:

طرف چپ دو تساوی یکسان است پس:

$\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH}$

قرار دهید: $FH=2FA$

$\Rightarrow \frac{NF}{2FA}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



۱۳- داخل سهمی $y=x^2$ و پایین خط $y=2$ مد نظر است.

۱۴- الف)

$CDFG=\begin{cases} x=2 \\ 0\le y\le 4 \\ 0\le z\le 3 \end{cases}$

ب)

$AD=\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

پ) $y=2$

۱۵- $\vec{a}=(2,3,-1) \qquad \vec{b}=(1,0,1) \qquad \vec{c}=(0,2,1)$

$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})}{|\vec{b}-\vec{c}|^2}(\vec{b}-\vec{c})$

$\vec{b}-\vec{c}=(1,0,1)-(0,2,1)=(1,-2,0)$

$|\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})=(2,3,-1).(1,-2,0)=2+(-6)+0=-4$

$\Rightarrow \vec{a}'=\frac{-4}{5}(1,-2,0)=(-\frac{4}{5},\frac{8}{5},0)$

۱۶- $|2\vec{a}\times\vec{b}|=2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\times6\times4\times\sin30^\circ$

$=2\times6\times4\times\frac{1}{2}=24$

۱۷- به کمک سه نقطهٔ داده‌شده دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را می‌سازیم:

$S_\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{AB}=\text{انتها}-\text{ابتدا}=(3-2,1+1,4-3)=(1,2,1)$

$\overrightarrow{AC}=(-1-2,1+1,0-3)=(-3,2,-3)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-8,0,8)$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{64+0+64}=8\sqrt{2}$

$S_\Delta=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

۱۸- $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0 \xleftrightarrow[|b|\neq0]{|a|\neq0} \cos\theta=0$

$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱- $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+3 & y+5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3=5 \Rightarrow x=2 \\ y+5=4 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$

۲- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1=1$

$k|kA|=k\times k^3|A|=k^4|A|=625$

$\Rightarrow k^4\times1=625 \Rightarrow k=\pm5$

۳- $\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}}_{B}A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

چون $|B|=15-14=1$ مخالف صفر است، پس ماتریس B وارون دارد. طرفین تساوی را از چپ در وارون B ضرب می‌کنیم:

$\underbrace{B^{-1}B}_{I}A=B^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow IA=B^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A=B^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

از طرفی وارون B برابر است با:

$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$

۴- قرار دهید $|A|=x$، سپس به روش ساروس دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$A=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 1 \\ 1 & |A| & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A|=\left|\begin{matrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & 0 \\ 1 & x \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$x=(x^2+0+2)-(0+2x+0)$$

$$x=x^2-2x+2 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=1\,,\,x=2 \Rightarrow |A|=1\,,\,|A|=2$$

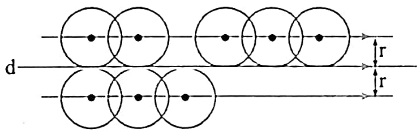
۵- شرط جواب منحصربه‌فرد داشتن:

$$\frac{m-3}{4}\neq\frac{3}{m+1} \Rightarrow (m-3)(m+1)\neq 12$$

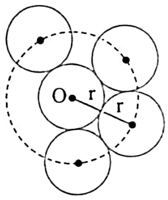
$$\Rightarrow m^2-2m-3\neq 12 \Rightarrow m^2-2m-15\neq 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m+3)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m\neq 5 \\ m\neq -3 \end{cases}$$

۶- الف) دو خط موازی با d و به فاصلهٔ r از خط d



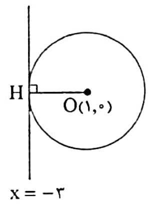
ب) دایره به مرکز O و شعاع $2r$



۷- الف) نیمساز

ب) نادرست (جواب درست: سهمی)

۸- فاصلهٔ مرکز دایره از خط $x+3=0$، یعنی (OH) شعاع دایره است.



$$OH=\frac{|1+0+3|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{4}{1}=4 \Rightarrow R=4$$

معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-1)^2+(y-0)^2=16$$

۹- مرکز و شعاع دو دایره را محاسبه می‌کنیم:

دایرهٔ اول: $x^2+y^2-2x+2y+c=0$

$$\begin{cases} O=(1,-1) \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4c}=\sqrt{2-c} \end{cases}$$

دایرهٔ دوم: $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

$$\begin{cases} O'=(-1,1) \\ r'=\sqrt{2} \end{cases}$$

فاصلهٔ بین دو مرکز OO' برابر است با:

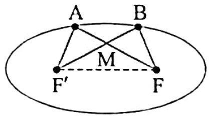
$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

چون دو دایره مماس‌بیرون هستند، پس: $OO'=r+r'$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}=\sqrt{2-c}+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2-c}=\sqrt{2} \Rightarrow c=0$$

۱۰- اولاً نقاط A و B روی بیضی قرار دارند. با توجه به تعریف بیضی:

$$\begin{matrix} AF+AF'=2a \\ BF+BF'=2a \end{matrix} \xrightarrow[\text{(طبق فرض)}]{AF'=BF} AF=BF'$$



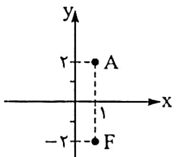
ثانیاً:
$$\begin{cases} AF=BF' \\ AF'=BF \\ FF'=\text{ضلع مشترک} \end{cases}$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند.

$$\Rightarrow A\hat{F}F'=B\hat{F}'F$$

در نتیجه $\overset{\Delta}{MFF'}$ متساوی‌الساقین است و $MF=MF'$؛ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط FF' است، پس M روی قطر کوچک بیضی است.

۱۱- ابتدا A و F را روی محورهای مختصات پیدا می‌کنیم:



با توجه به جایگاه A و F، سهمی قائم و دهانه رو به پایین است. از طرفی $AF=4$، پس $a=-4$.

معادلهٔ سهمی قائم برابر است با:

$$(x-1)^2=4(-4)(y-2) \Rightarrow (x-1)^2=-16(y-2)$$

هم‌چنین معادلهٔ خط هادی به صورت $y=y_A-a$ است.

$$\xrightarrow{\text{خط هادی}} y=2-(-4)=6 \Rightarrow y=6$$

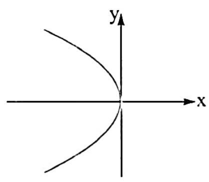
۱۲- اگر قطر دهانهٔ دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی دیش برابر $a=\frac{4b^2}{16h}$ است.

$$\frac{a'}{a}=\frac{\frac{b^2}{4(2h)}}{\frac{b^2}{4h}}=\frac{4h}{8h}=\frac{1}{2}$$

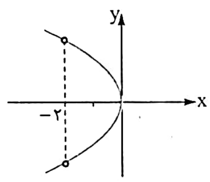
فاصلهٔ کانونی نصف می‌شود.

۱۳- ابتدا سهمی افقی $y^2+x=0$ را رسم می‌کنیم.

$$\Rightarrow x=-y^2$$



اکنون روابط $\begin{cases} x>-2 \\ y^2+x\leq 0 \end{cases}$ را روی سهمی اعمال می‌کنیم:



۱۴- الف) محور zها

ب) درست

$$i\times j=k$$

$$(i\times j)\cdot i=k\cdot i=0$$

پ) گزینهٔ «۱»

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با ثابت‌ماندن $\vec{a}$ و $\vec{b}$، زمانی بیشترین مقدار است که $\cos\theta$ بیشترین مقدار باشد. $\max(\cos\theta)=1 \Rightarrow \theta=0$

ت) گزینهٔ «۳» می‌دانیم ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ $(\vec{a}\times\vec{b})$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

هم‌چنین ضرب خارجی هر مضربی از دو بردار، بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\,,\,\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$$

$$r\vec{a}\times s\vec{b}\perp\vec{a}\,,\,r\vec{a}\times s\vec{b}\perp\vec{b}$$

۱۵- $A=(0,0,3)$ $\quad$ $B=(1,0,1)$

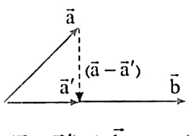
مختصات وسط AB برابر است با: $M=(\frac{0+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{3+1}{2})=(\frac{1}{2},0,2)$

فاصلهٔ M تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2+2^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

۱۶- روش اول

طبق شکل بردار $(\vec{a}.\vec{a}')$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است.



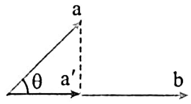
$$(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}-\vec{a}')\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}'\cdot\vec{b}=0$$

از طرفی بردار $\vec{a}'$ موازی بردار $\vec{b}$ است، پس $\vec{a}'$ مضربی از $\vec{b}$ است. $\vec{a}'=k\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-(k\vec{b})\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-k|b|^2=0 \Rightarrow k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}$$

پس $a'=\dfrac{a\cdot b}{|b|^2}\vec{b}$.

روش دوم



طبق شکل: $\cos\theta=\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\dfrac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta$

از طرفی چون بردار $\vec{a}'$ موازی بردار $\vec{b}$ است.

$$\Rightarrow \vec{a}'=k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'|=k|\vec{b}|$$

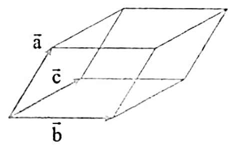
$$\Rightarrow k=\frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

۱۷- متوازی‌السطوحی با شرایط داده‌شده رسم می‌کنیم:

$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}=(1,1,0)$

$\vec{b}=(0,1,1)$

$\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1)$



$$V_{\text{حجم}}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,1,-1)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(1,1,0).(1,1,-1)=2 \Rightarrow V_{\text{حجم}}=2$$

اما حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است.

$$\text{مساحت قاعده}=|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

$$h=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۸- $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}=(2,-1,2) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{4+1+4}=3$

$\vec{b}=(1,-1,0) \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+1+0=3 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{3\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=45^\circ$$

آزمون شمارهٔ ۱۱ (نوبت دوم)

۱- الف) $2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$

ب) باید درایه‌های خارج قطر اصلی صفر باشند:

$m+1=0 \Rightarrow m=-1$

$2n+4=0 \Rightarrow n=-2$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

اما $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A+I$ برابر است با: $A+I=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

۲- الف) $A=[3i-2j]_{3\times3}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ب) $B^2=B\times B$:

$$B^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

۳- $(A-B)^2=(A-B)\times(A-B)$

$$=A\times A-A\times B-B\times A+B\times B=A^2-AB-BA+B^2$$

اما طبق فرض، A و B تعویض‌پذیرند؛ یعنی $AB=BA$ بنابراین:

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

۴- $A-2I$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A-2I|=2-0=2$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- الف) نادرست؛ شرط بی‌شمار جواب: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

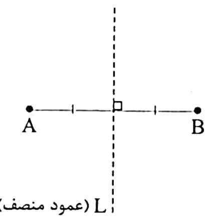
ب) اولاً دترمینان A برابر است با قرینهٔ ضرب درایه‌های روی قطر فرعی:

$|A|=-(1\times2\times(-1))=2$

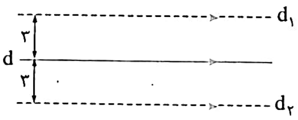
ثانیاً: $||A|A|=|2A|=2^3|A|=8\times2=16$

۶- الف) بیضی   ب) درست

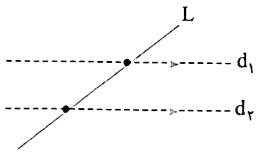
۷- مکان هندسی اول: مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند، خطِ عمودمنصف پاره‌خط AB است.



مکان هندسی دوم: مکان هندسی نقاطی در صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از هم می‌باشند.



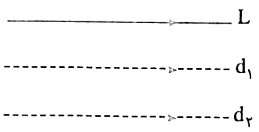
محل برخورد دو مکان هندسی جواب مسئله است؛ یعنی باید وضعیت نسبی خط L و دو خط d_1 و d_2 را بررسی کنیم:



الف) خط L، دو خط d_1 و d_2 را قطع می‌کند، مسئله دو جواب دارد.

ب) خط L بر یکی از دو خط d_1 و d_2 منطبق است، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ) خط L با d_1 و d_2 موازی است، پس آن‌ها را قطع نمی‌کند، مسئله جواب ندارد.



۸- الف) شرط این‌که معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایره باشد، آن است که:

$a^2+b^2-4c>0$

$x^2+y^2-4x+6y+a=0 \Rightarrow 16+36-4a>0$

$\Rightarrow -4a>-52 \Rightarrow a<13$

ب) روش اول از خط $x+y=1$ داریم: $y=1-x$

با جای‌گذاری در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه۲ برحسب x می‌رسیم:

$$x^2+(1-x)^2-2x-2(1-x)-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+1+x^2-2x-2x-2+2x-2=0 \Rightarrow 2x^2-2x-3=0$$

چون $\Delta=4-4(2)(-3)=4+24=28$ مثبت است، پس معادله ۲ جواب دارد؛ یعنی خط اولیه و دایره در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

(روش دوم): از معادلهٔ دایره، مرکز و شعاع را پیدا می‌کنیم:

$$O=\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(1,1)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2-4(-2)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+8}=2$$

فاصلهٔ مرکز دایره را تا خط $x+y=1$ محاسبه می‌کنیم:

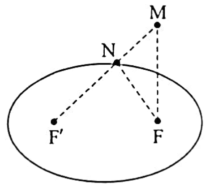
$$OH=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases}R=2\\ OH=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow OH<R$$

یعنی خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

۹- باید نشان دهیم: $MF+MF'>2a$

M را به F و F' وصل می‌کنیم. نقطهٔ N را روی بیضی مشخص می‌کنیم. از N به F وصل می‌کنیم.



$$MF+MF'=MF+(MN+NF')=(MF+MN)+NF'$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث $\overset{\Delta}{MNF}$: $MF+MN>NF$

$$\Rightarrow MF+MF'>NF+NF'$$

اما بنا بر تعریف بیضی، چون N روی بیضی است، پس $NF+NF'=2a$ در نتیجه:

$$MF+MF'>2a$$

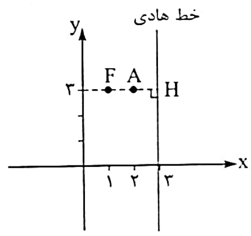
۱۰- $AA'=2a=16\Rightarrow a=8$

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{c}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=6$$

فاصلهٔ رأس A تا کانون نزدیک، برابر $a-c$ است. $a-c=8-6=2$

۱۱- الف) رأس $A=(2,3)$

خط هادی: $x=3$



با توجه به شکل بالا، مختصات کانون F برابر است با: $F=(1,3)$

و پارامتر سهمی $a=-1$ است؛ پس معادلهٔ سهمی افقی دهانهٔ چپ را خواهیم داشت:

$$(y-3)^2=-4(x-2)\Rightarrow(y-3)^2=-4x+8$$

ب) برای پیداکردن محل برخورد سهمی با محور طول‌ها، باید معادلهٔ سهمی را با خط $y=0$ قطع دهیم:

$$\begin{cases}(y-3)^2=-4x+8\\ y=0\end{cases}\Rightarrow 9=-4x+8\Rightarrow 4x=-1$$

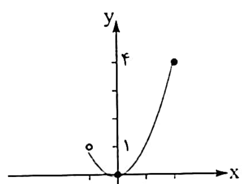
محل برخورد سهمی با محور طول‌ها: $\Rightarrow x=-\frac{1}{4}\Rightarrow\left(-\frac{1}{4},0\right)$

۱۲- الف) محور yها

ب) درست

پ) $y=x^2$

$-1<x\leq 2$



ت) $|\vec{a}|=\sqrt{0+9+16}=5$

۱۳- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$(2,m,-1)\cdot(m+1,3,2)=0\Rightarrow 2m+2+3m-2=0$$

$$\Rightarrow 5m=0\Rightarrow m=0$$

۱۴- $\vec{a}\cdot\vec{b}=10\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=10\Rightarrow 3\times5\times\cos\theta=10\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}$

از طرفی $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ در نتیجه:

$$\sin^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

اما مساحت مثلث تولیدشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

۱۵- حجم برابر است با: $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}&\vec{i}&\vec{j}\\ 0&2&2&0&2\\ 2&-3&0&2&-3\end{array}\right|=(0+4\vec{j}+0)-(4\vec{k}-6\vec{i}+0)$$

$$=6\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}=(6,4,-4)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(1,0,-1)\cdot(6,4,-4)=6+0+4=10\Rightarrow\text{حجم}=10$$

آزمون شمارهٔ ۱۲ (نوبت دوم)

۱- الف) ماتریس اسکالر

ب) $|A|=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})=-1$

پ) نادرست؛ (ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است هر گاه $|A|\neq0$.)

۲- ابتدا درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}$$

اکنون وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=8-9=-1\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}4&-3\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3\\3&-2\end{bmatrix}$$

۳-

$$\underbrace{[x\quad 1]_{1\times2}\begin{bmatrix}1&0\\-2&-3\end{bmatrix}_{2\times2}}_{[x-2\quad -3]}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}_{2\times1}=0\Rightarrow[x-2\quad -3]\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow(x+1)(x-3)=0\Rightarrow x=-1,x=3$$

۴-

$$3A=\begin{bmatrix}|A|&-5\\1&4|A|\end{bmatrix}\Rightarrow|3A|=4|A|^2+5$$

$$\Rightarrow 3^2|A|=4|A|^2+5\xrightarrow{|A|=x}4x^2-9x+5=0$$

$$\Rightarrow(x-1)(4x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|A|=1\\|A|=\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|A^{-1}|=1\\|A^{-1}|=\frac{4}{5}\end{cases}$$

۵-

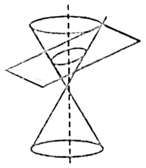
شرط جواب‌نداشتن: $\frac{m}{4}=\frac{9}{m}\neq\frac{m+1}{-4}\Rightarrow m^2=36\Rightarrow\begin{cases}m=6\\m=-6\end{cases}$

برای $m=6$ داریم: $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}\neq\frac{7}{-4}$

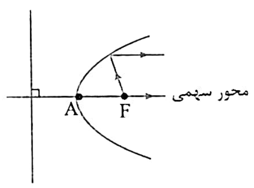
برای $m=-6$ داریم: $\frac{-6}{4}=\frac{9}{-6}\neq\frac{-5}{-4}$

هر دو مقدار m قابل قبول هستند.

۶- الف) بیضی



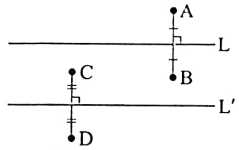
ب) درست



۷- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. آن را L می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند نیز عمودمنصف پاره‌خط CD است. آن را L' می‌نامیم. محل برخورد دو عمودمنصف جواب مسئله است. بنابراین وضعیت نسبی دو خط L و L' را بررسی می‌کنیم:

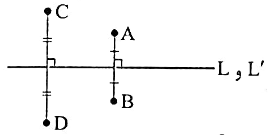
الف) $L \parallel L'$

(فاقد جواب)



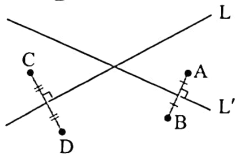
ب) L' و L منطبق بر هم‌اند.

(بی‌شمار جواب)

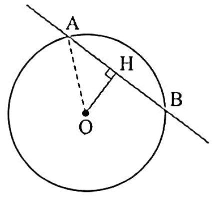


پ) L' و L متقاطع

(یک جواب)



۸- ابتدا شکل مناسبی برای مسئله ترسیم می‌کنیم:



فاصلهٔ مرکز دایره $O(0,1)$ از خط $3x+4y+6=0$، OH را محاسبه می‌کنیم:

$$OH=\frac{|0+4+6|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

می‌دانیم خطی که از مرکز دایره به وتری از آن دایره عمود باشد، آن وتر را نصف می‌کند.

پس $AH=BH=\frac{2\sqrt5}{2}=\sqrt5$. با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{OHA}$ داریم:

$$OA^2=OH^2+AH^2 \Rightarrow R^2=2^2+\sqrt5^2=4+5=9 \Rightarrow R=3$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-0)^2+(y-1)^2=9$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{محل تلاقی با محور yها}} 0^2+(y-1)^2=9 \Rightarrow y-1=\pm3 \Rightarrow \begin{cases}y=4\\y=-2\end{cases}$$

پس دایره محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۲- و ۴ قطع می‌کند.

۹- از هر دایره مرکز و شعاع را پیدا می‌کنیم:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1 \Rightarrow \begin{cases}O=(1,-2)\\R=\sqrt1=1\end{cases}$$

$$x^2+y^2+6x+2y-6=0 \Rightarrow \begin{cases}O'=(\frac{-6}{2},\frac{-2}{2})=(-3,-1)\\ R'=\frac12\sqrt{36+4+24}=4\end{cases}$$

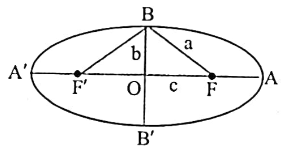
فاصلهٔ بین مراکز دو دایره برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(1+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

از طرفی $R+R'=5$ ، $|R-R'|=3$ و $3<\sqrt{17}<5$، پس دو دایره متقاطع‌اند.

۱۰- طبق فرض $2b=\frac12(2a)$، پس $2b=a$.

در بیضی زیر:



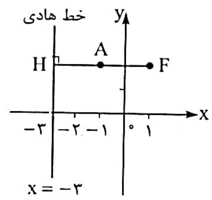
$$A\begin{cases}OB=b\\OF=c\ ,\ F\hat BF'=2O\hat BF\\BF=a\end{cases}$$

از طرفی کسینوس زاویهٔ OBF برابر است با:

$$\cos O\hat BF=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac ba=\frac b{2b}=\frac12 \Rightarrow \cos O\hat BF=\frac12 \Rightarrow O\hat BF=60^\circ$$

$$\Rightarrow F\hat BF'=2\times60^\circ=120^\circ$$

۱۱- ابتدا شکل مناسبی برای مسئله ترسیم می‌کنیم:



از کانون F بر خط هادی عمود می‌کنیم.

فاصلهٔ F تا H برابر است با $2|a|$.

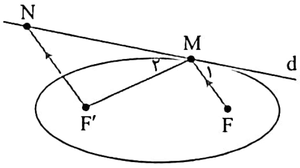
$$FH=4 \Rightarrow 2|a|=4 \Rightarrow |a|=2$$

وسط پاره‌خط FH، رأس سهمی A می‌باشد.

با توجه به جایگاه A و F، سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت راست باز می‌شود.

$$\begin{matrix}A(-1,2)\\a=+2\end{matrix}\xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}}(y-2)^2=4(2)(x+1)\Rightarrow (y-2)^2=8(x+1)$$

۱۲- ابتدا شکل مسئله را تکمیل می‌کنیم:



چون M روی بیضی است، پس $MF+MF'=2a$ و برای تمام نقاط دیگر از خط d، چون نقطه خارج بیضی قرار می‌گیرد، مجموع فواصل آن تا F و F' از 2a بیشتر است. بنابراین $MF+MF'$ کم‌ترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر؛ زاویه‌های $M_1=M_2$ می‌باشند.

از طرفی $MF \parallel NF'$ و خط d مورب است. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat N=\hat M_1$. در نتیجه $\hat N=\hat M_2$ و از آن‌جا مثلث MNF' متساوی‌الساقین است؛ یعنی $MF'=NF'$.

۱۳- الف) درست

$$((\underbrace{\vec i\times\vec k}_{-\vec j})\times\vec i)\cdot\vec j=(-\vec j\times\vec i)\cdot\vec j=(\vec i\times\vec j)\cdot\vec j=\vec k\cdot\vec j=0$$

ب) صفر، زیرا:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta$$

۱۴-

$$2m+0+0=(\sqrt{m^2+4})(\sqrt{4+4})(\cos\frac\pi3)$$

$$\Rightarrow 2m=(\sqrt{m^2+4})(2\sqrt2)(\frac12)$$

$$\Rightarrow 4m^2=(m^2+4)(2)\Rightarrow 2m^2=m^2+4\Rightarrow m^2=4\Rightarrow\begin{cases}m=2\\m=-2\end{cases}$$

برای $m=-2$، $\vec a\cdot\vec b=-4$ می‌باشد؛ پس باید θ از 90° بیشتر باشد اما طبق فرض $\theta=60^\circ$ است. پس $m=-2$ قابل قبول نیست.

۱۵- ابتدا $\vec a+\vec b$ و $2\vec c-\vec b$ را می‌سازیم:

$$\begin{matrix}\vec a=(+2,-1,1)\\ \vec b=(-1,2,0)\\ \vec c=(1,-1,0)\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\vec u=\vec a+\vec b=(1,1,1)\\ \vec v=2\vec c-\vec b=(2,-2,0)-(-1,2,0)\\ =(3,-4,0)\end{cases}$$

اکنون تصویر قائم بردار $\vec u$ را بر امتداد بردار $\vec v$ محاسبه می‌کنیم:

$$\vec u'=\frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|^2}\vec v=\frac{3-4+0}{(\sqrt{9+16})^2}(3,-4,0)=\frac{-1}{25}(3,-4,0)=(\frac{-3}{25},\frac4{25},0)$$

۱۶- ابتدا بردار $\vec u=\vec a-\vec j$ را می‌سازیم:

$$\vec a=(-2,0,1)$$

$$\vec u=\vec a-\vec j=(-2,0,1)-(0,1,0)=(-2,-1,1)$$

اکنون مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec u$ و $\vec b$ تولید می‌شود، برابر است با:

$$S_\Delta=\frac12|\vec u\times\vec b|$$

از طرفی بردار $\vec u\times\vec b$ برابر است با:

$$\vec u\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\-2&-1&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=-\vec i+7\vec j+5\vec k$$

$$\Rightarrow|\vec u\times\vec b|=\sqrt{(-1)^2+(7)^2+(5)^2}=\sqrt{75}=5\sqrt3$$

$$\Rightarrow S_\Delta=\frac12\times5\sqrt3=\frac{5\sqrt3}{2}$$

۱۷- باید $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0$:

$$\vec b\times\vec c=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&-1&1\\1&m&-1\end{vmatrix}=(1-m)\vec i+2\vec j+(m+1)\vec k$$

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=(m,-1,1)\cdot(1-m,2,m+1)=0$$

$$\Rightarrow m-m^2-2+m+1=0\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$$

فصل ۱: ماتریس و کاربرد

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ \sqrt{2} & 0/5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ \sqrt{3}\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

تعریف مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ است». مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 5 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ سطری و ۲ ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش ۲×۳ است.

تذکر: نمایش کلی ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} ها درایهٔ واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً:

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \qquad A_{2\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ به صورت $a_{ij}=2i-j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$$

برای درایهٔ a_{11} داریم: $i=1, j=1$ پس: $a_{11}=2(1)-1=1$

برای درایهٔ a_{12} داریم: $i=1, j=2$ پس: $a_{12}=2(1)-2=0$

و به همین ترتیب: $a_{21}=2(2)-1=3$ ، $a_{13}=2(1)-3=-1$

$a_{23}=2(2)-3=1$ ، $a_{22}=2(2)-2=2$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\end{bmatrix}_{1\times3}$.

۲) **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ 3\\ 1\end{bmatrix}_{3\times1}$.

۳) **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس مربعی مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. مانند: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$ یا $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$.

نکته: در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون برابر دارند $(a_{11},a_{22},a_{33},\ldots)$ را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های مربعی بالا، به‌ترتیب قطرهای اصلی $\begin{matrix}2\\ & 1\end{matrix}$ و $\begin{matrix}1\\ & 5\\ & & 9\end{matrix}$ هستند.

۴) **ماتریس قطری:** ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2} \qquad A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}_{3\times3}$$

۵) **ماتریس اسکالر:** ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم: در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2} \qquad I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$$

۶) **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$ باشد.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 2+b\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1-b & 1\\ a+b & -1\end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیربه‌نظیر را برابر هم قرار دهیم:

$$\begin{cases}1-b=a \Rightarrow a+b=1\\ 1=2+b \Rightarrow b=-1\end{cases} \Rightarrow a=2$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌ها را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همهٔ درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA = r[a_{ij}]_{m\times n} = [ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال: **اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A+3B$ را به دست آورید.**

پاسخ: عدد ۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد ۳ را در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$2A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 3B=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A_{m\times n}$، آن‌گاه قرینهٔ ماتریس A، از ضرب عدد ۱- در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.
توجه شود که $A+(-A)=\bar{O}$.

تذکر: به کمک قرینهٔ یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:
$A-B=A+(-B)$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبهٔ $m\times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی جمع)

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (عضو قرینه)

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $A=B \Rightarrow rA=rB$

۸) $\begin{cases} rA=rB \\ r\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r([a_{ij}\pm b_{ij}])=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$
$$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]$.

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]$$
$$=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب A در B، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبهٔ $m\times p$ است. نکتهٔ مهم این‌که، برای پیداکردن درایهٔ سطر i و ستون j حاصل‌ضرب AB، باید درایه‌های سطر iام ماتریس A را نظیربه‌نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: **اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس BA را محاسبه کنید.**

پاسخ: تعداد ستون‌های B (۳تا) با تعداد سطرهای A (۳تا) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبهٔ ماتریس BA، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظرش در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مثلاً درایهٔ سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$$1\times 1+0\times 2+2\times 3=7$$

تذکر: توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (۳تا) با تعداد سطرهای B (۲تا) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

۱) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A\times B\neq B\times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $A\times I=I\times A=A$

در واقع ماتریس همانی I، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

۲) ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

۳) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تذکر: دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکتهٔ مهم دربارهٔ ضرب ماتریس‌ها

۱) اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال: **دو ماتریس ناصفر 2×2 مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.**

پاسخ: اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

۲) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$؛

آن‌گاه $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $AC=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اما $B\neq C$.

تذکر: **توان در ماتریس**: منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب‌کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^2=A\times A$$
$$A^3=A\times A\times A$$
$$\vdots$$

نکته: اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۲-۲A$ را بیابید.

پاسخ:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$$

$$۲A=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۲A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=-I$$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است، به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارونِ A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم. بنابراین: $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$

تذکر: وارون ماتریس A در صورت وجود منحصر به فرد است.

نحوهٔ محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

وارون ماتریس ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\quad,\quad ad-bc\neq ۰$$

مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم.

$|A|=ad-bc$

توجه شود که محاسبات بالا، فقط برای ماتریس‌های ۲×۲ است.

تذکر مهم: مقدار $|A|$ در محاسبهٔ $A^{-۱}$ در مخرج کسر ظاهر می‌شود، پس شرط وارون‌پذیری ماتریس A، آن است که $|A|\neq ۰$.

مثال: **وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ را در صورت وجود محاسبه کرده، سپس پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.**

پاسخ: ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم: $|A|=۳-(-۲)=۵\neq ۰$

پس ماتریس A وارون‌پذیر است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

برای امتحان‌کردن پاسخ باید $A^{-۱}A$ و $AA^{-۱}$ برابر با ماتریس همانی I شود:

$$A^{-۱}A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$AA^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

مثال: **اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $(A^{-۱})^{-۱}$ را محاسبه کنید.**

پاسخ: باید از A دو بار وارون بگیریم. حدس ما این است که ماتریس اولیه حاصل شود.

$$|A|=۴-۳=۱\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۳ & ۴\end{bmatrix}$$

حال وارونِ $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم: $|A^{-۱}|=۴-۳=۱$

$$(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=A$$

در نتیجه: $(A^{-۱})^{-۱}=A$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت: $\begin{cases}ax+by=e\\ cx+dy=f\end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

فرمِ ماتریسی دستگاه به صورت زیر است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}}=\underbrace{\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

نماد ماتریس ضرایب = A

نماد ماتریس مجهولات = X

نماد ماتریس جواب = B

$\Rightarrow AX=B$

برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم: $AX=B$

سپس اگر A وارون‌پذیر باشد، وارونِ A را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$X=A^{-۱}B$

مثال: دستگاه $\begin{cases}۲x+y=-۳\\ x+۳y=۱\end{cases}$ **را به روش ماتریس وارون حل کنید.**

پاسخ:

ماتریس ضرایب $=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=A$

ماتریس مجهولات $=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=X$ ، ماتریس جواب $=\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix}=B$

فرم ماتریسی دستگاه: $\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix}\Rightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}B$

بنابراین باید وارون A را محاسبه کنیم: $|A|=۶-۱=۵$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵}\\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

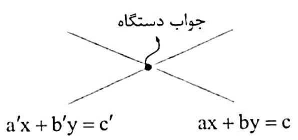
$$X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵}\\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۱۰}{۵}\\ \frac{۵}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۲\,,\,y=۱$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

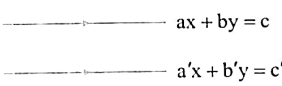
یک دستگاه دو معادله دو مجهول، از دو معادله تشکیل می‌شود، هر معادله یک خط است. منظور از حل دستگاه، بررسی وضعیت نسبی این دو خط است که سه حالت خواهد داشت: موازی، منطبق و متقاطع.

دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

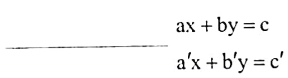
الف) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد که مختصات همان نقطهٔ تقاطع دو خط است.



ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.



پ) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.



نکته مهم: اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a&b\\ a'&b'\end{bmatrix}$$

اگر $|A|\neq 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع‌اند).

اگر $|A|=0$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق‌اند).

مثال: بررسی کنید دستگاه $\begin{cases}3x-2y=3\\ 6x-4y=1\end{cases}$ **دارای چند جواب است؟**

پاسخ: کافی است نسبت‌ها را تشکیل دهیم: $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{3}{1}$

حالت موازی‌بودن رخ می‌دهد، پس دستگاه فاقد جواب است.

توجه شود که در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

$$A=\begin{bmatrix}3&-2\\ 6&-4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-12+12=0$$

مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که دستگاه $\begin{cases}x+2y=5\\ mx-3y=1\end{cases}$**، جواب منحصر به فرد داشته باشد.**

پاسخ: کافی است: $\frac{1}{m}\neq\frac{2}{-3}$

یعنی اگر $m\neq\frac{-3}{2}$ باشد، دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

دترمینان

۱) ماتریس ۱×۱:

$$\boxed{A=[a]\Rightarrow |A|=a}$$

مثلاً: $A=[2]\Rightarrow |A|=2$

۲) ماتریس ۲×۲:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}a&b\\ c&d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc}$$

مثلاً: $A=\begin{bmatrix}2&1\\ 3&-1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-2-3=-5$

۳) ماتریس ۳×۳:

اگر ماتریس $A_{3\times3}$ روبه‌رو را در نظر بگیریم، آن‌گاه دو روش برای محاسبهٔ دترمینان A وجود دارد:

قطر اصلی — قطر فرعی

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

روش اول: ساروس

در این روش، ستون‌های اول و دوم را کنار ماتریس می‌نویسیم و دترمینان A برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

مثال: دترمینان ماتریس زیر را به روش ساروس محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\ 0&1&3\\ -1&1&-2\end{bmatrix}$$

پاسخ: ستون‌های اول و دوم را دوباره می‌نویسیم:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&2&-1&1&2\\ 0&1&3&0&1\\ -1&1&-2&-1&1\end{array}\right|=(-2-6+0)-(1+3+0)=-8-4=-12$$

روش دوم: دترمینان برحسب سطر یا ستون دلخواه

ماتریس $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. دترمینان این ماتریس برحسب سطر اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\ a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\ a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

یعنی هر درایه از سطر اول مانند a_{1j} را در $(-1)^{1+j}$ ضرب کرده و سپس آن را در دترمینان ماتریس ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستونی که درایه روی آن قرار دارد، ضرب می‌کنیم. حال اگر بخواهیم دترمینان را برحسب ستون سوم پیدا کنیم، داریم:

$$|A|=a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}+a_{23}\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$+a_{33}\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

توجه داشته باشیم که در محاسبهٔ دترمینان برحسب سطر یا ستون دلخواه، حتماً باید به جواب یکسان برسیم.

مثال: دترمینان ماتریس مثال قبل را یک بار با سطر اول و یک بار ستون سوم مجدداً محاسبه کنید.

پاسخ: برحسب سطر اول:

$$\begin{vmatrix}\boxed{1\quad 2\quad -1}\\ 0\quad 1\quad 3\\ -1\quad 1\quad -2\end{vmatrix}=?$$

$$|A|=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\ 1&-2\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&3\\ -1&-2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\ -1&1\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}1&3\\ 1&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&3\\ -1&-2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&1\\ -1&1\end{vmatrix}$$

$$=1(-2-3)-2(0+3)-1(0+1)=-5-6-1=-12$$

برحسب ستون سوم:

$$\begin{vmatrix}1&2&\boxed{-1}\\ 0&1&\boxed{3}\\ -1&1&\boxed{-2}\end{vmatrix}$$

$$|A|=-1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\ -1&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\ -1&1\end{vmatrix}$$

$$-2\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\ 0&1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\ -1&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&2\\ -1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2\\ 0&1\end{vmatrix}$$

$$=-1(0+1)-3(1+2)-2(1-0)=-1-9-2=-12$$

نکته: دترمینان ماتریس‌های قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی. مثلاً:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&2\end{vmatrix}=1\times(-1)\times2=-2$$

نکته: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد و k یک عدد حقیقی آن‌گاه: $|kA|=k^n|A|$

به بیان فارسی: اگر عدد k در ماتریس A ضرب شده باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس kA برابر است با ضرب عددِ k^n در دترمینان ماتریس A.

مثال اگر $|A| = ۲$ و $A_{۳\times۳}$ دترمینان ماتریس $۴A$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\begin{cases}|۴A| = ۴^۳|A| = ۴^۳\times ۲ = ۱۲۸\\ A_{۳\times۳}\end{cases}$$

نکته اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس A باشد آن‌گاه دترمینان آن معکوس دترمینان A است. مثلاً اگر $|A| = ۵$ باشد، آن‌گاه $|A^{-۱}| = \frac{۱}{۵}$ است.

مثال **اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|A| = -۲$ باشد، آن‌گاه حاصل $|۵A^{-۱}|$ را بیابید.**

پاسخ

$$\begin{cases}|۵A^{-۱}| = ۵^۳|A^{-۱}| = ۵^۳\times\frac{۱}{|A|} = ۱۲۵\times\frac{۱}{-۲} = \frac{-۱۲۵}{۲}\\ A_{۳\times۳}\end{cases}$$

مثال اگر $A = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}|A| & -۱\\ ۴ & |A|\end{bmatrix}$ **آن‌گاه $|A|$ را محاسبه کنید.**

پاسخ

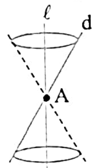
$$A = \begin{bmatrix}\frac{|A|}{۲} & \frac{-۱}{۲}\\ ۲ & \frac{|A|}{۲}\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{|A|}{۲}\times\frac{|A|}{۲} - ۲\times(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{|A|^۲}{۴} + ۱ \xrightarrow{\times۴} |A|^۲ - ۴|A| + ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(اتحاد مربع دوجمله‌ای)}} (|A|-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow |A| - ۲ = ۰ \Rightarrow |A| = ۲$$

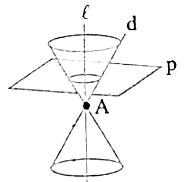
فصل ۲
آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی



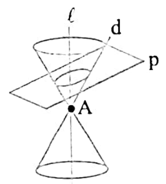
تعریف رویهٔ مخروطی: فرض کنید دو خط d و ℓ در نقطهٔ A متقاطع‌اند (غیرعمودند). سطح حاصل از دوران d حول ℓ را یک رویهٔ مخروطی می‌نامیم. ℓ را محور تقارن، A را رأس و خط d را مولد این رویهٔ مخروطی می‌نامیم.

نکته صفحهٔ دلخواه P و رویهٔ مخروطی می‌توانند حالت‌های زیر را نسبت به هم داشته باشند که در هر حالت به فصل مشترک صفحه و رویهٔ مخروطی یک «مقطع مخروطی» می‌گوییم.

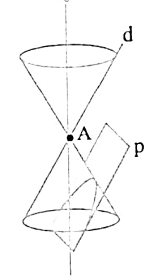


۱) صفحهٔ P بر محورِ رویهٔ مخروطی عمود و از A عبور نکند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، دایره است.

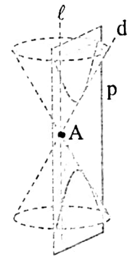
توجه شود که درحالت (۱)، اگر صفحهٔ P از نقطهٔ A عبور کند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، یک نقطه است.



۲) اگر صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، بیضی است.



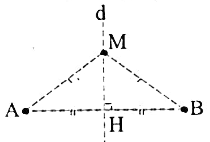
۳) اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس A نگذرد، در این صورت یک سهمی خواهیم داشت (اگر صفحهٔ P با همین شرایط از رأس A بگذرد، مقطع مخروطی حاصل یک خط است).



۴) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور ℓ نباشد، در این صورت مقطع مخروطی حاصل یک هذلولی است.

تعریف مکان هندسی

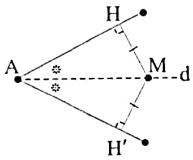
مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه است.



عمودمنصف

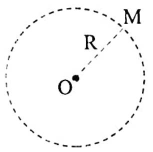
مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمود منصف آن پاره‌خط است.

$AM = BM \Leftrightarrow$ خط d عمودمنصف AB است.



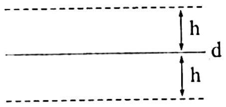
مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.

(M نقطهٔ دلخواه روی خط d) $MH = MH' \Leftrightarrow$ خط d نیمساز A است.



مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت، برابر مقدار ثابتی باشد یک دایره خواهد بود. نقطه ثابت، مرکز دایره O و مقدار ثابت (R)، شعاع دایره است.

M روی دایره $\Leftrightarrow OM = R$



مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت h هستند، دو خط راست موازی d (در طرفین آن) و به فاصلهٔ h از آن است.

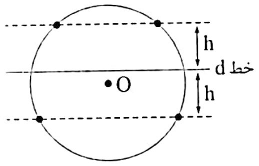
نکته یکی از کاربردهای مکان هندسی ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه یا نقاطی است که دارای ویژگی معین باشند.

برای حل این‌گونه مسائل، دو یا چند مکان هندسی داده‌شده را ترسیم می‌کنیم. محل برخورد آن‌ها نقاط مطلوب هستند.

مثال **خط d و دایرهٔ C داده شده‌اند. نقاطی روی دایره انتخاب کنید که از خط d به فاصلهٔ ثابت معلوم h باشند.**

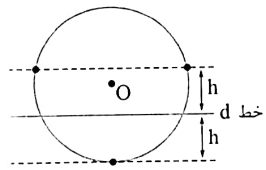
پاسخ می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ h باشند، دو خط به موازات d (در طرفین آن) و به فاصلهٔ h از آن است. محل برخورد این دو خط و دایرهٔ داده‌شده جواب‌های مسئله هستند. اما تعداد جواب‌ها به خط d، شعاع دایره (R) و فاصلهٔ ثابت h بستگی دارد.

حالت (۱): مسئله ۴ جواب دارد.

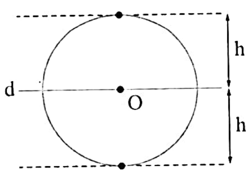


$h < R$

حالت (۲): مسئله ۳ جواب دارد.

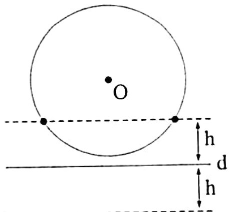


حالت (۳): مسئله ۲ جواب دارد.

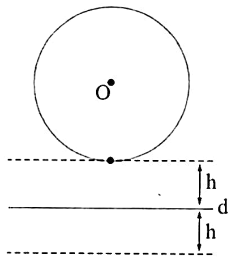


$h = R$

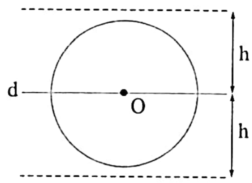
یا



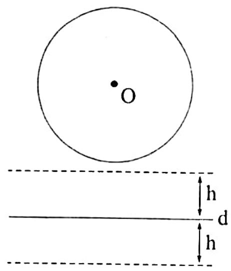
حالت (۴): مسئله ۱ جواب دارد.



حالت (۵): مسئله جواب ندارد.

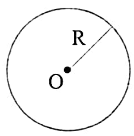


یا



در نتیجه مسئله دارای حالت‌های بدون جواب، یک جواب، دو جواب، سه جواب و چهار جواب است.

درس ۲: دایره



تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O (مرکز) فاصله‌ای ثابت برابر R (شعاع) داشته باشند را دایره می‌نامیم.

معادلهٔ دایره

معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ و اندازهٔ شعاع آن R باشد، برابر است با:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اگر مبدأ مختصات مرکز دایره باشد، آن‌گاه $O(0,0)$ و معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$x^2+y^2=R^2$$

تذکر: معادلهٔ فوق را معادلهٔ استاندارد دایره می‌نامیم.

مثال: معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۴ را بنویسید که $O(-2,3)$ مرکز آن باشد. سپس محل برخورد دایره با محورهای مختصات را بیابید.

پاسخ: طبق معادلهٔ استاندارد:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=16$$

برای پیداکردن محل برخورد دایره با محورهای مختصات یک بار x و بار دیگر y را برابر صفر قرار می‌دهیم.

محل برخورد با محور xها:

$$y=0 \Rightarrow (x+2)^2+(0-3)^2=16 \Rightarrow (x+2)^2+9=16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=7 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{7}-2 \\ x=-\sqrt{7}-2 \end{cases}$$

یعنی دایرهٔ فوق محور xها را در نقاط $A(-2+\sqrt{7},0)$ و $B(-2-\sqrt{7},0)$ قطع می‌کند.

محل برخورد با محور yها:

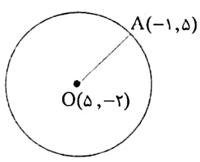
$$x=0 \Rightarrow (0+2)^2+(y-3)^2=16 \Rightarrow 4+(y-3)^2=16$$

$$\Rightarrow (y-3)^2=12 \Rightarrow y-3=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} y=3+2\sqrt{3} \\ y=3-2\sqrt{3} \end{cases}$$

یعنی دایرهٔ فوق محور yها را در نقاط $C(0,3+2\sqrt{3})$ و $D(0,3-2\sqrt{3})$ قطع می‌کند.

مثال: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(5,-2)$ را بنویسید که از نقطهٔ $(-1,5)$ بگذرد.

پاسخ: طبق شکل، OA شعاع دایره است.

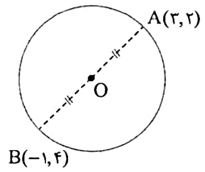


ابتدا با توجه به تعریف دایره، فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$r=OA=\sqrt{(-1-5)^2+(5+2)^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-5)^2+(y+2)^2=85$$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $B=(-1,4)$ و $A=(3,2)$ دو سر قطری از آن باشند.



پاسخ: O وسط پاره‌خط AB است. بنابراین:

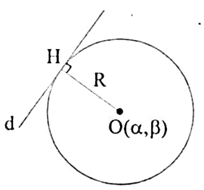
$$O=\frac{A+B}{2}=(1,3)$$

و طبق شکل OA شعاع دایره است.

$$r=OA=\sqrt{(3-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-1)^2+(y-3)^2=5$$

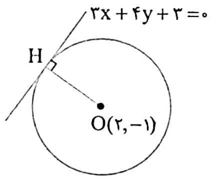
معادلهٔ دایره مماس بر خط d



فرض می‌کنیم $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره‌ای باشد که بر خط d به معادلهٔ $ax+by+c=0$ مماس است. OH (عمود رسم‌شده از O بر خط d) شعاع دایره است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$R=OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ را بنویسید که بر خط $3x+4y+3=0$ مماس باشد.

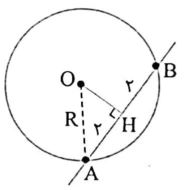


پاسخ: OH همان شعاع است.

$$r=OH=\frac{|3(2)+4(-1)+3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|9-4|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-2)^2+(y+1)^2=1$$

مثال مهم: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,-2)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x-2y=0$ وتری به طول ۴ جدا کند.



پاسخ: می‌دانیم قطر عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند.

فاصلهٔ O تا خط $x-2y=0$، یعنی OH برابر است با:

$$OH=\frac{|1-2(-2)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{OAH}$ داریم:

$$OA^2=AH^2+OH^2$$

$$R^2=2^2+\sqrt{5}^2=4+5=9 \Rightarrow R=3 \xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

معادلهٔ ضمنی دایره

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ می‌تواند معادلهٔ دایره باشد. در واقع:

الف) اگر $a^2+b^2-4c>0$ آن‌گاه معادله، حتماً معادلهٔ دایره است.

ب) اگر $a^2+b^2-4c=0$ آنگاه معادله، مربوط به یک نقطه است.

پ) اگر $a^2+b^2-4c<0$ آن‌گاه هیچ زوج مرتبی در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین مجموعه جواب معادله تُهی خواهد بود.

نکته: برای تبدیل معادلهٔ ضمنی به معادلهٔ استاندارد دو روش وجود دارد:

الف) روش مربع کامل‌کردن

ب) یافتن مرکز و شعاع از روی معادلهٔ ضمنی، سپس نوشتن معادلهٔ استاندارد.

مرکز و شعاع را از روی معادلهٔ ضمنی، به کمک فرمول‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow \begin{cases} O=\left(\dfrac{-a}{2},\dfrac{-b}{2}\right) \\ R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \end{cases}}$$

مثال: بررسی کنید که معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ معادلهٔ دایره است یا خیر. سپس به روش مربع کامل‌کردن معادلهٔ استاندارد را بسازید.

پاسخ

$$a=-2,\quad b=4,\quad c=-4 \Rightarrow a^2+b^2-4c=4+16+16=36>0$$

پس معادلهٔ دایره است.

برای مربع کامل‌کردن، xها را در یک پرانتز و yها را در یک پرانتز قرار می‌دهیم. عدد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. سپس با اضافه‌کردن عدد مناسب به داخل پرانتزها، به اتحاد مربع دوجمله‌ای خواهیم رسید:

$$(x^2-2x)+(y^2+4y)=4$$

$$(\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{اتحاد}}-1)+(\underbrace{y^2+4y+4}_{\text{اتحاد}}-4)=4$$

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4=4 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

مثال **ابتدا مرکز و شعاع دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ را به روش فرمولی محاسبه کرده سپس معادلهٔ استاندارد را بنویسید.**

پاسخ

$$O=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}),\quad a=-2,\quad b=4,\quad c=-4$$

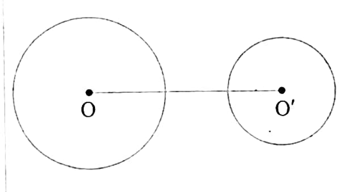
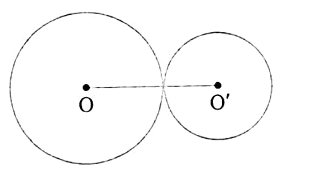
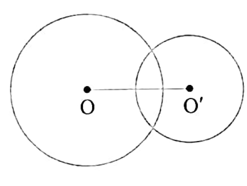
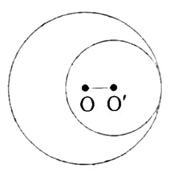
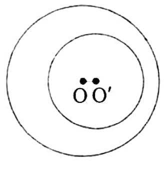
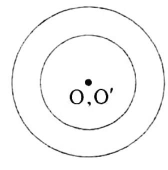
$$O=(\frac{2}{2},\frac{-4}{2})=(1,-2)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}} (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

وضعیت نسبی دو دایره

دو دایره نسبت به هم دارای ۶ وضعیت هستند:

۱ متخارج $OO'>R+R'$ 	۲ مماس خارج (بیرون) $OO'=R+R'$ 
۳ متقاطع $\lvert R-R'\rvert<OO'<R+R'$ 	۴ مماس داخل (درون) $OO'=\lvert R-R'\rvert$ 
۵ متداخل $0<OO'<\lvert R-R'\rvert$ 	۶ هم‌مرکز $OO'=0$ 

برای تشخیص هر کدام از این شش وضعیت، باید از معادلات داده‌شده، مرکز و شعاع هر دو دایره و سپس فاصلهٔ بین دو مرکز، یعنی OO' را بیابیم. رابطهٔ بین OO'، $R+R'$ و $\lvert R-R'\rvert$ گویای وضعیت نسبی دو دایره خواهد بود.

مثال **دو دایرهٔ $x^2+y^2-4x+4y=1$ و $x^2+y^2-4x+8y+19=0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟**

پاسخ ابتدا از هر دایره مرکز و شعاع را با فرمول می‌یابیم:

$$x^2+y^2-4x+4y-1=0 \Rightarrow \begin{cases} O=(\frac{4}{2},\frac{-4}{2})=(2,-2) \\ R=\frac{1}{2}\sqrt{16+16+4}=3 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-4x+8y+19=0 \Rightarrow \begin{cases} O'=(\frac{4}{2},\frac{-8}{2})=(2,-4) \\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{16+64-76}=1 \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{(2-2)^2+(-2+4)^2}=2 \quad \text{و} \quad \begin{cases} OO'=2 \\ R=3 \\ R'=1 \end{cases} \Rightarrow OO'=\lvert R-R'\rvert$$

پس دو دایره، مماس داخل هستند.

مثال **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(2,-3)$ بوده و بر دایرهٔ C با معادلهٔ $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ مماس خارج باشد.**

پاسخ مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را می‌یابیم:

$$O'=(\frac{-2}{2},\frac{2}{2})=(-1,1) \qquad R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-4}=1$$

فاصلهٔ بین دو مرکز، یعنی OO' برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(2+1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

طبق فرض، دو دایره بر هم مماس خارج هستند، پس:

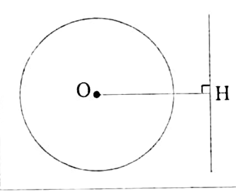
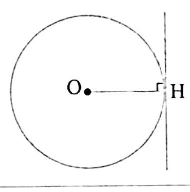
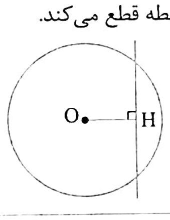
$$OO'=R+R' \qquad 5=R+1 \Rightarrow R=4$$

پس معادلهٔ دایرهٔ مطلوب، برابر است با: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

وضعیت خط و دایره

دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و خط d به معادلهٔ $d:mx+ny+p=0$ داده شده است.

خط و دایره نسبت به هم سه وضعیت دارند:

الف خط دایره را قطع نمی‌کند. 	ب خط بر دایره مماس است. 	پ خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. 

برای تشخیص وضعیت خط و دایره، باید از معادلهٔ دایرهٔ داده‌شده، مرکز و شعاع را بیابیم. سپس به کمک فرمول OH که قبلاً گفته شد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را محاسبه کنیم.

- اگر $OH>R$ باشد، آن‌گاه حالت «الف» رخ داده است.
- اگر $OH=R$ باشد، آن‌گاه حالت «ب» را خواهیم داشت.
- اگر $OH<R$ باشد، آن‌گاه حالت «پ» رخ داده است.

نکته روش دیگری نیز برای تعیین وضعیت خط و دایره وجود دارد. بدین‌صورت که معادلهٔ خط را برحسب x مرتب می‌کنیم. سپس در معادلهٔ دایره به جای y جای‌گذاری می‌کنیم. بعد از ساده‌کردن به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب x می‌رسیم. دلتای این معادله را حساب می‌کنیم.

○ اگر $\Delta < 0$، خط، دایره را قطع نمی‌کند.

○ اگر $\Delta = 0$، خط بر دایره مماس است.

○ اگر $\Delta > 0$، خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

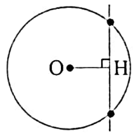
مثال: وضعیت خط $2x - y = 0$ و دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ را به دو روش مختلف مشخص کنید.

پاسخ: روش اول: مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را می‌یابیم.

$$O = (\frac{2}{2}, \frac{2}{2}) = (1,1) \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+28} = 3$$

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر است با:

$$OH = \frac{|2(1)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



چون $OH < R$ ($\frac{\sqrt{5}}{5} < 3$)، پس خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

روش دوم: معادلهٔ خط را برحسب x مرتب می‌کنیم:

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

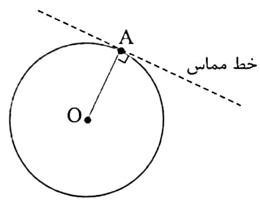
با جای‌گذاری در معادلهٔ دایره داریم: $x^2 + (2x)^2 - 2x - 2(2x) - 7 = 0$

$$x^2 + 4x^2 - 2x - 4x - 7 = 0 \qquad 5x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(5)(-7) = 36 + 140 = 176 > 0$$

پس خط، دایره را در دو نقطه قطع کرده است.

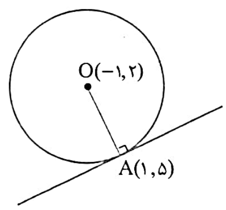
طریقهٔ نوشتن معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ A روی دایره



باید از معادلهٔ دایرهٔ داده‌شده، مرکز O را بیابیم. سپس شیب OA را پیدا می‌کنیم. شیب خط مماس عکس و قرینهٔ شیب OA است، زیرا خط مماس در نقطهٔ A بر شعاع، عمود است. اکنون با داشتن شیب خط مماس و مختصات نقطهٔ A، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

مثال: در نقطهٔ $A(1,5)$ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را بنویسید.

پاسخ: ابتدا مرکز دایرهٔ داده‌شده را پیدا می‌کنیم.



$$O(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2}) = (-1,2)$$

شیب OA برابر است با:

$$m_{OA} = \frac{5-2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

پس شیب خط مماس برابر است با $\frac{-2}{3}$.

$$\begin{cases} m = \frac{-2}{3} \\ A(1,5) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط مماس}} y - 5 = \frac{-2}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow 3y - 15 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + 3y = 17$$

وضعیت نقطه و دایره

نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و دایرهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ داده شده است.

بعد از یافتن مرکز و شعاع دایره:

الف) اگر $OA > R$ باشد؛ A خارج دایره است.

ب) اگر $OA = R$ باشد؛ A روی دایره است.

ج) اگر $OA < R$ باشد؛ A داخل دایره است.

روش دیگری نیز برای تعیین وضعیت نقطهٔ A و دایره وجود دارد بدین‌صورت که ابتدا معادلهٔ دایره را به شکل بالا درمی‌آوریم، سپس مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ دایره جای‌گذاری می‌کنیم.

○ اگر حاصل مثبت شد، نقطهٔ A خارج دایره است.

○ اگر حاصل صفر شد، نقطهٔ A روی دایره است.

○ اگر حاصل منفی شد، نقطهٔ A داخل دایره است.

مثال: وضعیت نقاط $(1,-2)$ و $(-1,3)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ بیابید.

پاسخ: روش اول: مرکز دایره را می‌یابیم:

$$O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}) = (1,-2)$$

سپس R را می‌یابیم:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+20} = \sqrt{10}$$

فرض می‌کنیم $A(-1,3)$ و $B(1,-2)$ باشد، باید OA و OB را محاسبه کنیم و آن‌ها را با R مقایسه می‌کنیم:

$OA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} > \sqrt{10} \Rightarrow$ A خارج از دایره است.

$OB = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+2)^2} = 0 < \sqrt{10} \Rightarrow$ B داخل دایره است.

(در واقع نقطهٔ B همان مرکز دایره است.)

روش دوم: مختصات نقطهٔ $(1,-2)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(1)^2 + (-2)^2 - 2(1) + 4(-2) - 5 = 1 + 4 - 2 - 8 - 5 = -10 < 0$$

پس نقطهٔ $(1,-2)$ داخل دایره است.

حال مختصات نقطهٔ $(-1,3)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

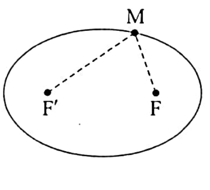
$$(-1)^2 + 3^2 - 2(-1) + 4(3) - 5 = 1 + 9 + 2 + 12 - 5 = 19 > 0$$

پس نقطهٔ $(-1,3)$ خارج دایره است.

درس ۲: بیضی و سهمی

بیضی

تعریف: بیضی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت، مقداری ثابت باشد. نقاط ثابت را کانون‌های بیضی می‌گوییم و با F و F' نمایش می‌دهیم و مقدار ثابت را با 2a نمایش می‌دهیم.



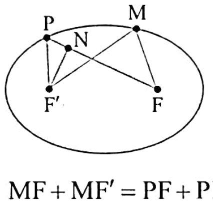
$$MF + MF' = 2a$$

مقدار ثابت 2a، همان طول قطر بزرگ بیضی خواهد بود.

سؤال مهم: اگر نقطهٔ دلخواه N را داخل بیضی فرض کنیم، ثابت کنید:

$$NF + NF' < MF + MF'$$

پاسخ: شکل مناسبی را رسم می‌کنیم:



NF را از طرف N ادامه می‌دهیم تا بیضی را در P قطع کند. سپس PF' را رسم می‌کنیم.

طبق تعریف بیضی، چون M و P هر دو روی بیضی هستند،

پس: $MF + MF' = PF + PF'$

اما: $PF + PF' = (PN + NF) + PF'$

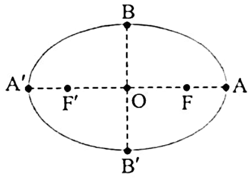
طبق رابطهٔ نامساوی مثلث در مثلث $\overset{\Delta}{PNF'}$: $PF' + PN > NF'$

در نتیجه: $(PN+NF) + PF' = (PN + PF') + NF > NF' + NF$

$$\Rightarrow PF + PF' > NF + NF' \Rightarrow MF + MF' > NF + NF'$$

معرفی نقاط بیضی

هر بیضی دارای ۷ نقطهٔ مهم است:



طبق شکل:

A و A′: رئوس اصلی بیضی

B و B′: رئوس فرعی بیضی

F و F′: کانون‌های بیضی

O: مرکز بیضی

نکات بیضی

(1) O وسط A و A′، B و B′ و F و F′ قرار دارد، یعنی:

$OA = OA'$

$OB = OB'$

$OF = OF'$

(2) AA′ را قطر بزرگ بیضی نامیده و طول آن برابر 2a است، پس: $OA = OA' = a$

(3) BB′ را قطر کوچک بیضی نامیده و طول آن برابر 2b است، پس: $OB = OB' = b$

(4) FF′ را فاصلهٔ کانونی بیضی نامیده و طول آن برابر 2c است، پس: $OF = OF' = c$

(5) بین a، b و c رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $a^2 = b^2 + c^2$

در نتیجه:

$$\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$$

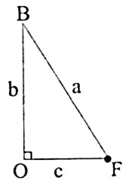
(6) چون BB′، عمودمنصف FF′ است. پس فاصلهٔ دو سر پاره‌خط BB′ از F و F′ یکسان است، یعنی $BF = BF' = B'F = B'F'$.

از طرفی چون B و B′ روی بیضی هستند، پس:

$$\begin{cases} BF + BF' = 2a \\ B'F + B'F' = 2a \end{cases}$$

در نتیجه: $BF = BF' = B'F = B'F' = a$.

اکنون با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{OBF}$ داریم:



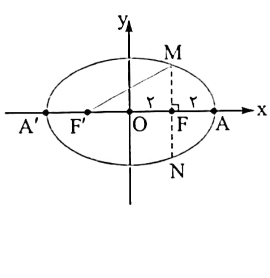
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

(7) مقدار $\frac{c}{a}$ را در بیضی، خروج از مرکز می‌نامیم و عددی است بین صفر و یک. هر چه‌قدر این عدد به صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کم‌تر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر است و هر چه‌قدر این عدد به یک نزدیک شود، بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

در حالتی که $\frac{c}{a} = 0$ شود، بیضی تبدیل به دایره می‌شود و در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ شود، بیضی تبدیل به پاره‌خط AA′ خواهد شد.

مثال: مرکز یک بیضی منطبق بر مبدأ مختصات است و قطرهای بیضی روی محورهای مختصات هستند. فرض کنید نقطهٔ F دقیقاً وسط OA و $OA = 4$ باشد. در نقطهٔ F عمودی بر AA′ رسم کرده‌ایم تا بیضی را در M و N قطع کند، طول MF، طول MN و مختصات نقاط M و N را به دست آورید.

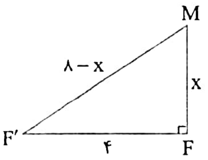
پاسخ: ابتدا شکل مناسبی رسم می‌کنیم: F وسط OA و $OA = 4$ است، پس $OF = 2$.



می‌دانیم $OF = OF'$، پس $OF' = 2$ و $FF' = 4$، طبق تعریف بیضی $MF + MF' = 2a$ و 2a همان AA′ است. طبق فرض:

$$OA = 4 \Rightarrow AA' = 8 \Rightarrow MF + MF' = 8$$

قرار می‌دهیم $MF = x$، پس: $MF' = 8 - x$، اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{MFF'}$، رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$(8-x)^2 = 16 + x^2 \Rightarrow 64 - 16x + \cancel{x^2} = 16 + \cancel{x^2}$$

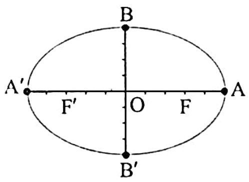
$$\Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow MF = 3$$

با استدلالی مشابه برای مثلث $\overset{\Delta}{NFF'}$ نتیجه می‌گیریم $FN = 3$. چون MN در نقطهٔ $x = 2$ بر محور xها عمود است و $MF = FN = 3$، پس: $MN = 6$.

مختصات نقاط M و N عبارت‌اند از: $M = (2, 3), N = (2, -3)$

مثال: یک بیضی رسم کنید (به‌طور تقریبی) که $c = 3, a = 5$ باشد.

پاسخ: ابتدا چون $c = 3$، پس $FF' = 2c$ برابر ۶ خواهد بود.

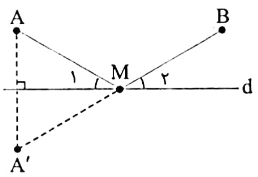


پس پاره‌خطی به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم بر امتداد FF′، نقاط A و A′ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که فاصلهٔ A تا F و فاصلهٔ A′ تا F′ برابر $a - c$؛ یعنی $5 - 3 = 2$ باشد. اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس b را می‌یابیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$\begin{cases} OF = OF' = 3 = c \\ OA = OA' = 5 = a \\ OB = OB' = 4 = b \end{cases}$$

یادآوری: برای پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B به طوری که از نقطه‌ای روی خط d، بگذریم، کافی است بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را پیدا کرده (A′)، و به نقطهٔ B وصل کنیم. مسیر AMB، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

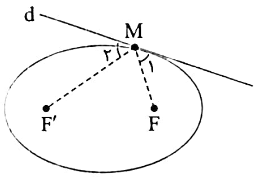


توجه شود که در این حالت زوایای $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ با هم برابرند. زیرا:

$$\begin{cases} AH = A'H \\ A\hat{H}M = A'\hat{H}M = 90 \\ HM = \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHM} \cong \overset{\Delta}{A'HM}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{\hat{M}_2 = \hat{M}_3} \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

مثال: خط d مانند شکل، بر یک بیضی مماس است. نقطهٔ تماس را M می‌نامیم.



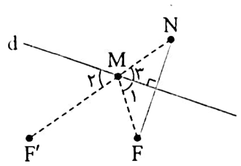
الف) مجموع فاصله‌های کدام نقطه از خط d نسبت به دو کانون F و F′ کم‌ترین مقدار را دارد؟ چرا؟

ب) چرا $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$؟

پ) از نقطهٔ F بر بدنهٔ بیضی اشعهٔ نوری را می‌تابانیم. انعکاس نور از کدام نقطه می‌گذرد؟ چرا؟

پاسخ: الف) طبق تعریف بیضی هر نقطه روی بیضی مجموع فاصله‌هایش از F و F′ برابر مقدار ثابتی است. مجموع فواصل هر نقطهٔ خارجی بیضی از F و F′ از این مقدار ثابت بیشتر است. از نقاط روی خط d، فقط M روی بیضی است، پس $MF + MF'$ نسبت به بقیهٔ نقاط خط d کم‌ترین مقدار را دارد.

ب) چون مسیر F′MF کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ F به F′؛ به طوری که از خط d بگذرد، می‌باشد (این را از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم) پس، طبق یادآوری بالای مثال نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

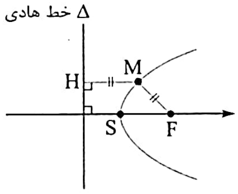


پ) از نقطهٔ F بر بدنهٔ داخلی بیضی اشعهٔ نوری می‌تابانیم، فرض می‌کنیم محل برخورد اشعهٔ نور با بدنهٔ داخلی بیضی، M باشد، اگر در نقطهٔ M بر بیضی خط مماسی رسم کنیم زاویهٔ بین پرتو و خط مماس، با زاویهٔ بین بازتاب پرتو و خط مماس یکی خواهد بود $(\hat{M}_1 = \hat{M}_2)$، پس طبق قسمت (الف) و (ب)، بازتاب پرتو باید از F' (کانون دیگر بیضی) عبور کند.

سهمی

تعریف: سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت به نام «کانون» و از یک خط ثابت به نام «خط هادی» به یک فاصله باشند. (نقطه خارج خط است).

F کانون و S رأس سهمی نامیده می‌شود.

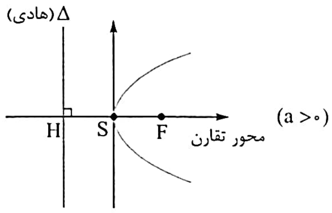


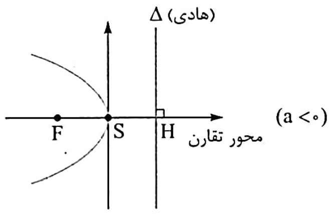
معادلات سهمی در حالتی که $S=(0,0)$

الف) سهمی افقی

فاصلهٔ S تا F با فاصلهٔ S تا H برابر است و با $|a|$ نشان داده می‌شود و فاصلهٔ کانونی سهمی نامیده می‌شود.

اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی به سمت راست و اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود.

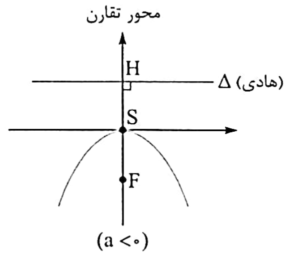


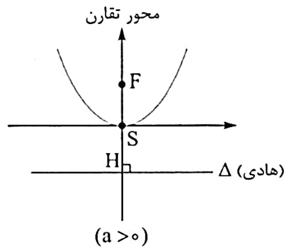


معادلهٔ سهمی افقی به صورت مقابل است: $\boxed{y^2 = 4ax}$

ب) سهمی قائم

همانند حالت افقی، فاصلهٔ S تا F با فاصلهٔ S تا H برابر است و با $|a|$ نشان داده می‌شود. اگر $a>0$ باشد، دهانه به سمت بالا و اگر $a<0$ باشد، دهانه به سمت پایین باز می‌شود.





معادلهٔ سهمی قائم به صورت مقابل است: $\boxed{x^2 = 4ay}$

نکته: جدول اطلاعات سهمی افقی و قائم در حالت $S=(0,0)$ به صورت زیر است:

دهانهٔ سهمی	محور تقارن	هادی Δ	کانون F	معادلهٔ سهمی $(a>0)$
رو به بالا	محور yها	$y=-a$	$(0,a)$	$x^2=4ay$
رو به پایین	محور yها	$y=a$	$(0,-a)$	$x^2=-4ay$
رو به راست	محور xها	$x=-a$	$(a,0)$	$y^2=4ax$
رو به چپ	محور xها	$x=a$	$(-a,0)$	$y^2=-4ax$

مثال: سهمی‌های به معادلات $x^2=-8y$ و $y^2=4x$ را به طور دقیق رسم کنید.

پاسخ: الف) $x^2=-8y$

اولاً سهمی قائم است. معادلهٔ کلی سهمی قائم به صورت $x^2=4ay$ است، پس:

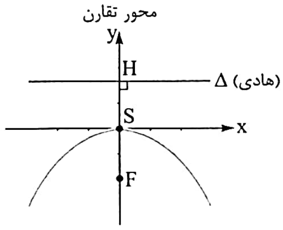
$4a=-8 \Rightarrow a=-2$

بنابراین دهانهٔ سهمی به سمت پایین باز می‌شود.

$S=(0,0)$

$F=(0,-2)$

$\Delta: y=2$



ب) $y^2=4x$

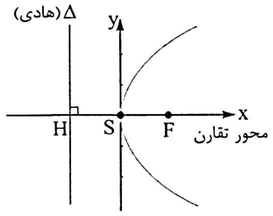
اولاً سهمی افقی است. معادلهٔ کلی سهمی افقی به صورت $y^2=4ax$ است، پس: $4a=4 \Rightarrow a=1$

بنابراین دهانهٔ سهمی به سمت راست باز می‌شود.

$S=(0,0)$

$F=(1,0)$

$\Delta: x=-1$



معادلات سهمی در حالتی که $S(h,k)$

الف) سهمی افقی

$\boxed{(y-k)^2 = 4a(x-h)}$

اطلاعات: کانون: $F=(h+a,k)$ — رأس: $S=(h,k)$

دهانه‌راست $a>0$ — هادی: $\Delta: x=h-a$

دهانه‌چپ $a<0$ — محور تقارن: $y=k$

ب) سهمی قائم

$\boxed{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$

اطلاعات: کانون: $F(h,k+a)$ — رأس: $S(h,k)$

دهانه‌بالا $a>0$ — هادی: $\Delta: y=k-a$

دهانه‌پایین $a<0$ — محور تقارن: $x=h$

تذکر: در رسم دقیق‌تر سهمی بهتر است بعد از مشخص‌شدن جایگاه S، F، Δ و محور تقارن، در نقطهٔ F پاره‌خطی به طول $4|a|$ بر محور تقارن عمود کنیم به گونه‌ای که F وسط این پاره‌خط باشد. دو سر این پاره‌خط در رسم سهمی، روی سهمی قرار گرفته و نشان می‌دهند که دهانهٔ سهمی چه‌قدر باز می‌شود.

مثال: سهمی $(y-1)^2 = 8(x-2)$ را به طور دقیق رسم و اطلاعات آن را مشخص کنید.

پاسخ: اولاً سهمی افقی است و فرم کلی سهمی افقی به صورت $(y-k)^2=4a(x-h)$ است، پس:

$\begin{cases} k=1 \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow S=(h,k)=(2,1)$

$4a=8$

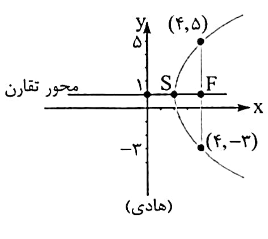
دهانه سمت راست باز می‌شود.

$\Rightarrow a=2>0 \Rightarrow$

$F=(h+a,k)=(2+2,1)=(4,1)$

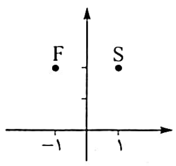
$\Delta: x=h-a=2-2=0$

محور تقارن: $y=k \Rightarrow y=1$



توجه کنید برای رسم دقیق این سهمی باید پاره‌خطی به طول $4|a|=8$ را عمود بر محور تقارن یعنی $y=1$ به گونه‌ای رسم کنیم که نقطهٔ $F(4,1)$ وسط آن باشد. پس اولاً پاره‌خط باید روی خط $x=4$ باشد و عمود بر $y=1$ در نقطهٔ $(4,1)$ که در آن صورت مختصات دو سر پاره‌خط $(4,5)$ و $(4,-3)$ است. ثانیاً طول آن برابر ۸ و F وسط آن باشد.

مثال: معادلهٔ یک سهمی را بنویسید به طوری که $S=(1,2)$ رأس آن و $F(-1,2)$ کانون آن باشد.



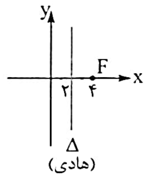
پاسخ: با توجه به جایگاه S و F در دستگاه مختصات، سهمی افقی است. F همیشه در داخل سهمی قرار می‌گیرد، پس باید دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز شود، یعنی a منفی است. از طرفی فاصلهٔ S تا F با $|a|$ برابر است.

$$\Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a=-2$$

معادلهٔ سهمی افقی به صورت روبه‌رو است: $(y-k)^2=4a(x-h)$

$$(y-2)^2=4(-2)(x-1) \Rightarrow (y-2)^2=-8(x-1)$$

مثال: معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که $F(4,0)$ کانون و خط هادی آن $x=2$ باشد.



پاسخ: با توجه به جایگاه کانون و خط هادی در دستگاه مختصات، سهمی افقی است.

خط هادی همیشه پشت سهمی و F در داخل سهمی قرار می‌گیرد، پس دهانهٔ سهمی به سمت راست باز می‌شود، یعنی a مثبت است. اما فاصلهٔ کانون تا خط هادی $2|a|$ است.

$$2|a|=2 \Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=+1$$

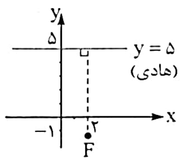
و S دقیقاً وسط F و خط هادی قرار می‌گیرد.

$$\Rightarrow S=(3,0) \Rightarrow (y-0)^2=4(1)(x-3) \Rightarrow y^2=4(x-3)$$

مثال: معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که $F(2,-1)$ کانون و خط هادی آن $y=5$ باشد.

پاسخ: با توجه به جایگاه کانون و خط هادی در دستگاه مختصات، سهمی قائم است. خط هادی همیشه پشت سهمی و F داخل سهمی قرار می‌گیرد، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است، یعنی a منفی است. فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر ۶ است. پس داریم:

$$\Rightarrow 2|a|=6 \Rightarrow |a|=3 \Rightarrow a=-3$$



S دقیقاً وسط F و خط هادی قرار می‌گیرد. $\Rightarrow S=(2,2)$

$$\Rightarrow (x-2)^2=4(-3)(y-2)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=-12(y-2)$$

تبدیل معادلهٔ یک سهمی به صورت متعارف

برای تبدیل معادلهٔ بازشدهٔ سهمی به صورت متعارف باید متغیری که توان ۲ دارد را تبدیل به اتحاد مربع دوجمله‌ای کنیم.

مثال: معادلهٔ یک سهمی به صورت $2x^2+y-4x=0$ است. آن را به حالت متعارف تبدیل کنید. کانون، هادی و محور تقارن آن را مشخص کنید.

پاسخ: xها را کنار هم قرار داده و از ضریب x^2 فاکتور می‌گیریم. y را به طرف دیگر تساوی می‌بریم.

$$2x^2-4x=-y \Rightarrow 2(x^2-2x)=-y$$

با اضافه‌کردن عدد مناسب در داخل پرانتز اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌سازیم.

$$2(\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{اتحاد}}-1)=-y \Rightarrow 2(x-1)^2-2=-y$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2=-y+2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{-1}{2}(y-2)$$

معادلهٔ آخر، فرم متعارف سهمی قائم است.

$$(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow \begin{cases} h=1 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow S=(1,2)$$

$$4a=\frac{-1}{2} \Rightarrow a=\frac{-1}{8}$$

پس دهانهٔ سهمی به سمت پایین باز می‌شود.

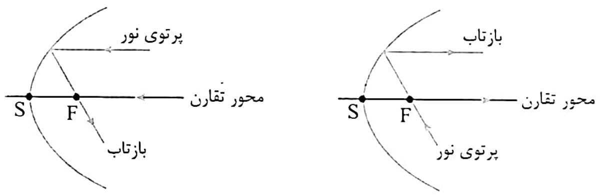
$$F=(h,k+a)=(1,2-\frac{1}{8})=(1,\frac{15}{8})$$

$$\Delta: y=k-a=2+\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$$

محور تقارن: $x=h \Rightarrow x=1$

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر پرتوی نوری که از کانون به بدنهٔ سهمی بتابد بازتاب آن موازی محور سهمی خواهد بود و برعکس هر شعاع نوری که موازی محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد بازتاب آن از کانون می‌گذرد.



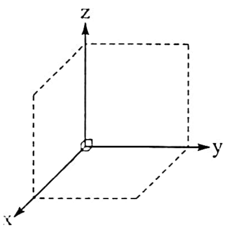
نکته: اگر یک سهمی را به عنوان یک دیش ماهواره در نظر بگیریم و قطر دهانهٔ دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی دیش برابر $a=\frac{4b^2}{16h}$ است.

فصل ۳ بردارها

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که $x,y,z\in\mathbb{R}$ هستند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$



فضای $\mathbb{R}^3$ از سه محور دوبه‌دو عمود برهم تشکیل می‌شود که محور xها، yها و zها نامیده می‌شود.

این ۳ محور طبق شکل تشکیل ۳ صفحهٔ خاص می‌دهند:

۱) صفحهٔ xoy (کف): $z=0$

۲) صفحهٔ xoz (دیوار چپ): $y=0$

۳) صفحهٔ yoz (دیوار راست): $x=0$

تذکر: در دو بُعد، محورهای x و y تشکیل چهار ناحیه می‌دادند. در سه بُعد، محورهای x، y و z تشکیل هشت ناحیه می‌دهند.

چهار ناحیه با $z>0$ و چهار ناحیه با $z<0$.

ناحیهٔ اول: $x,y,z>0$	ناحیهٔ دوم: $x<0,y>0,z>0$
ناحیهٔ سوم: $x<0,y<0,z>0$	ناحیهٔ چهارم: $x>0,y<0,z>0$
ناحیهٔ پنجم: $x>0,y>0,z<0$	ناحیهٔ ششم: $x<0,y>0,z<0$
ناحیهٔ هفتم: $x<0,y<0,z<0$	ناحیهٔ هشتم: $x>0,y<0,z<0$

فاصلهٔ دو نقطه از هم در فضا

الف) فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات

$$\begin{matrix} A=(x_A,y_A,z_A) \\ O=(0,0,0) \end{matrix} \Rightarrow |OA|=\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر

$A(x_A, y_A, z_A)$ $\qquad$ $B(x_B, y_B, z_B)$

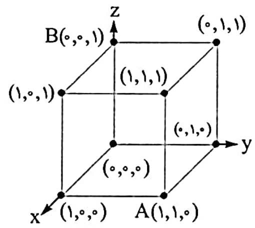
$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

پ) مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط واصل A و B

$$m = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2})$$

مثال: **مکعبی به طول ضلع ۱ در فضا رسم کنید و طول قطر مکعب را محاسبه کنید.**

پاسخ:



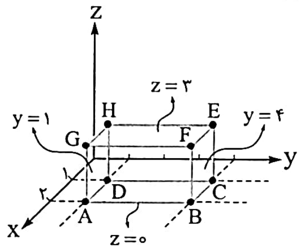
هر مکعب دارای ۴ قطر (هم‌اندازه) است که طول آن‌ها برابر $|AB|$ است.

$$|AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

تذکر: در مکعبی به طول ضلع a، طول قطر مکعب، $a\sqrt{3}$ است.

مثال: **مکعب‌مستطیلی رسم کنید که وجوه آن قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، $y = 4$ ، $z = 0$ و $z = 3$ هستند.**

پاسخ: صفحهٔ پشت؛ صفحهٔ $x = 1$ و صفحهٔ جلویی، صفحهٔ $x = 2$ است.



مثال: **دربارهٔ مکعب‌مستطیل مثال قبل به سؤالات زیر جواب دهید:**

الف) مختصات رئوس مکعب‌مستطیل را بنویسید.

ب) روابط مشخص‌کنندهٔ وجوه مکعب‌مستطیل را بنویسید.

پاسخ: (الف)

$A = (2,1,0)$ $\qquad$ $E = (1,4,3)$

$B = (2,4,0)$ $\qquad$ $F = (2,4,3)$

$C = (1,4,0)$ $\qquad$ $G = (2,1,3)$

$D = (1,1,0)$ $\qquad$ $H = (1,1,3)$

(ب) وجه اول: (کف)
$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

وجه دوم: (سقف)
$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

وجه سوم: (دیوار جلویی)
$$\begin{cases} x = 2 \\ 1 \le y \le 4 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

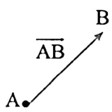
وجه چهارم: (دیوار عقبی)
$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 \le y \le 4 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

وجه پنجم: (دیوار چپی)
$$\begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

وجه ششم: (دیوار راستی)
$$\begin{cases} y = 4 \\ 1 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$$

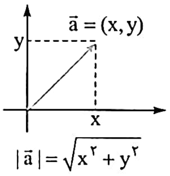
بردارها در $\mathbb{R}^2$

هر پاره‌خط جهت‌دار مانند AB یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B است.



طول بردار $\overrightarrow{AB}$ را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



دو بردار را مساوی (هم‌سنگ) گوییم هرگاه اندازه و جهت آن‌ها یکسان باشد. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند، در نتیجه معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم.

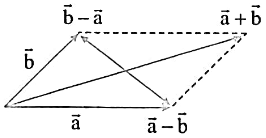
اعمال جبری روی بردارها

اگر $\vec a = (a_1, a_2)$ و $\vec b = (b_1, b_2)$ آن‌گاه:

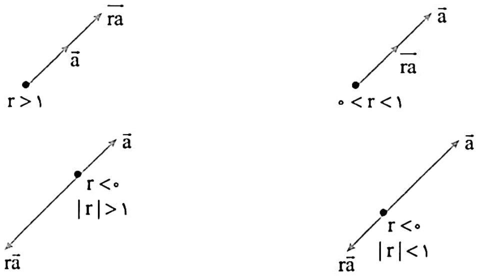
$$\vec a \pm \vec b = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$$
$$r\vec a = (ra_1, ra_2), r \in \mathbb{R}$$

تعبیر هندسی

الف)



ب)



تذکر: بیان بردار توسط بردارهای $\vec i$ و $\vec j$:

$$\vec a = (a_1, a_2) = a_1\vec i + a_2\vec j$$

مثلاً:

$$\vec a = (2,3) = 2\vec i + 3\vec j$$

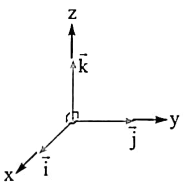
بردارها در $\mathbb{R}^3$

بردار $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$ (شروع از مبدأ) را در نظر می‌گیریم.

طول بردار $\vec a$ برابر است با:

$$|\vec a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

بیان بردار $\vec a$ به کمک بردارهای $\vec i$ و $\vec j$ و $\vec k$:



بردارهای $\vec i = (1,0,0)$ ، $\vec j = (0,1,0)$ و $\vec k = (0,0,1)$ را بردارهای یکه در جهت محور xها، محور yها و محور zها می‌نامیم.

$$\vec a = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k$$

تذکر: همانند دو بُعد، بردارهای سه‌بعدی نیز به روش متوازی‌الاضلاع جمع و تفریق می‌شوند و ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار سه‌بعدی نیز دقیقاً مانند بردار دوبعدی خواهد بود.

خواص جمع بردارها

(۱) $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$ (خاصیت جابه‌جایی)

(۲) $\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

(۳) $a + \vec o = \vec a$ (عضو خنثی)

(۴) $\vec a + (-\vec a) = \vec o$ (عضو قرینه)

(۵) $r(\vec a + \vec b) = r\vec a + r\vec b$

(۶) $(r+s)\vec a = r\vec a + s\vec a$

(۷) $(rs)\vec a = r(s\vec a)$

(۸) $\vec b = r\vec a \Rightarrow |\vec b| = \underbrace{|r|}_{\text{قدرمطلق}}|\vec a|$

مثال: **اگر $\vec a = (2,-1,0)$ ، $\vec b = (1,-3,2)$ و $r = -2$ بردار $r\vec a - \vec b$ را به دست آورید.**

پاسخ:

$$r\vec a = -2(2,-1,0) = (-4,2,0) \qquad -\vec b = (-1,3,-2)$$

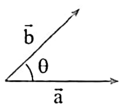
$$r\vec a - \vec b = r\vec a + (-\vec b) = (-4,2,0) + (-1,3,-2) = (-5,5,-2)$$

ضرب داخلی و خارجی بردارها

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند، آن‌گاه ضرب داخلی دو بردار را با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

نکتهٔ مهم: محاسبهٔ ضرب داخلی دو بردار با داشتن زاویهٔ بین دو بردار:



$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

که $|\vec{a}|$ و $|\vec{b}|$ طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند.

نکته: از دو رابطهٔ فوق، می‌توان فرمولی برای زاویهٔ بین دو بردار نتیجه گرفت:

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

مثال: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(-2,1,2)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا ضرب داخلی آن‌ها را می‌یابیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=-2\times-1+1\times1+2\times0=2+1=3$$

اکنون طول دو بردار را می‌یابیم: $|\vec{a}|=\sqrt{4+1+4}=3 \quad |\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{3\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=45^\circ$$

مثال: اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $\frac{\pi}{3}$ باشد، ضرب داخلی دو بردار را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=2\times3\times\frac{1}{2}=3$$

خواص ضرب داخلی

(۱) خاصیت جابه‌جایی: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

(۲) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(۳) خاصیت توزیع‌پذیری: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

(۴) $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(دو بردار برهم عمودند اگر و تنها اگر ضرب داخلی آن‌ها صفر شود.)

(۵) $\vec{a}.\vec{0}=\vec{0}.\vec{a}=0$

(ضرب داخلی بردار $\vec{a}$ در بردار صفر، عدد صفر می‌شود.)

(۶) نامساوی کشی ـ شوارتز: $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

(۷) اتحادها:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b} \quad و \quad |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})$$

مثال: اگر $|\vec{a}|=2$، $|\vec{b}|=3$ و $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=7$، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow 7=4+2\times3\cos\theta\Rightarrow3=6\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

مثال: مقدار m را طوری بیابید که دو بردار $\vec{a}=(m,-2m,1)$ و $\vec{b}=(2,-3,-1)$ برهم عمود باشند.

پاسخ: دو بردار زمانی برهم عمودند که حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد:

$$\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow2m+6m-1=0\Rightarrow8m=1\Rightarrow m=\frac{1}{8}$$

مثال: اگر $\vec{a}+\vec{b}=(1,2,1)$ و $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخ: طبق اتحادها داریم: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

طول $\vec{a}+\vec{b}$ برابر است با: $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$$(\sqrt{6})^2=2^2+2^2+2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow6=4+4+2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow2\vec{a}.\vec{b}=-2\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-1$$

مثال: اگر $|\vec{a}|=3$، $|\vec{b}|=5$، $|\vec{c}|=7$ و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$، آن‌گاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|-\vec{c}|=|-1||\vec{c}|\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}=|\vec{c}|^2\Rightarrow9+25+2\vec{a}.\vec{b}=49\Rightarrow2\vec{a}.\vec{b}=15$$

$$\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{15}{2}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{15}{2}\Rightarrow3\times5\times\cos\theta=\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

مثال: به کمک رابطهٔ کشی ـ شوارتز، بیشترین مقدار $6x-3y+2z$ را با شرط $x^2+y^2+z^2=9$ بیابید.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\vec{a}=(x,y,z) \qquad \vec{b}=(6,-3,2) \qquad \vec{a}.\vec{b}=6x-3y+2z$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{9}=3$$

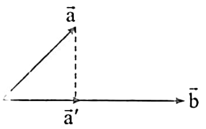
$$|\vec{b}|=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$$

طبق رابطهٔ کشی ـ شوارتز داریم: $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

$$|6x-3y+2z|\le3\times7\Rightarrow|6x-3y+2z|\le21$$

در نتیجه بیشترین مقدار $6x-3y+2z$ برابر ۲۱ است.

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$



$$\boxed{\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(0,-3,6)$ روی امتداد بردار $\vec{b}=(2,-1,-2)$ را بیابید.

پاسخ: طبق فرمول:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{0+3-12}{(\sqrt{4+1+4})^2}(2,-1,-2)$$

$$=\frac{-9}{9}(2,-1,-2)=(-2,1,2)$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(1,2,1)$ بر راستای بردار $\vec{b}+\vec{c}$ که $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(1,2,3)$ است را بیابید.

پاسخ: ابتدا $\vec{b}+\vec{c}$ را می‌یابیم: $\vec{b}+\vec{c}=(0,3,3)$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{0+6+3}{(\sqrt{0+9+9})^2}(0,3,3)=\frac{9}{18}(0,3,3)=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

تذکر: الف) در حالت خاص، اگر $\vec{a}\perp\vec{b}$ آن‌گاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر $\vec{0}$ می‌شود، زیرا:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$$

و $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$، در نتیجه: $\vec{a}'=(0)\vec{b}=\vec{0}$

ب) در حالت خاص، اگر $\vec a \parallel \vec b$ آن‌گاه تصویر $\vec a$ بر $\vec b$ با خودِ $\vec a$ برابر است. زیرا:

$$\vec a' = \frac{\vec a.\vec b}{|\vec b|^2}\vec b = \frac{|\vec a||\vec b|\cos\theta}{|\vec b|^2}\vec b = \frac{|\vec a||\vec b|\overbrace{\cos 0}^{1}}{|\vec b|^2}\vec b = \frac{|\vec a|}{|\vec b|}\vec b$$

اما $\frac{\vec b}{|\vec b|}$ برداری به طول واحد است که اگر در $|\vec a|$ ضرب شود دقیقاً همان بُردار $\vec a$ ساخته می‌شود. پس $\vec a' = \vec a$.

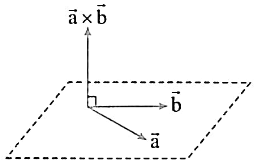
نکته: می‌دانیم جواب حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک عدد است. این عدد به زاویهٔ بین دو بردار بستگی دارد.

$\vec a.\vec b > 0 \Leftrightarrow \theta < 90^\circ \qquad \vec a.\vec b = 0 \Leftrightarrow \theta = 90^\circ \qquad \vec a.\vec b < 0 \Leftrightarrow \theta > 90^\circ$

مثلاً برای دو بردار $\vec a = (1,-1,2)$ و $\vec b = (0,1,-1)$ چون $\vec a.\vec b = 0-1-2 = -3$ منفی می‌شود، بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت زاویهٔ بین آن‌ها منفرجه است.

ضرب خارجی دو بردار

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که جواب آن یک عدد حقیقی بود، حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، یک بردار است. اگر $\vec a$ و $\vec b$ دو بردار باشند، ضرب خارجی $\vec a$ در $\vec b$ را با نماد $\vec a \times \vec b$ نشان می‌دهیم و برداری است که بر هر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ عمود است.



نحوهٔ محاسبهٔ $\vec a \times \vec b$

با یک مثال نحوهٔ محاسبهٔ $\vec a \times \vec b$ را توضیح می‌دهیم.

مثال: اگر $\vec a = (1,-1,2)$ و $\vec b = (0,1,1)$ بردار $\vec a \times \vec b$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-1,1)$$

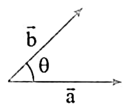
توجه کنید که در هر مرحله دترمینان 2×2 را محاسبه می‌کنیم.

مثال: برداری بیابید که بر هر دو بردار $\vec a = (-1,1,2)$ و $\vec b = (1,-2,3)$ عمود باشد.

پاسخ: می‌دانیم بردار $\vec a \times \vec b$ بر هر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ عمود است:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (7,5,1)$$

نکته: محاسبهٔ طول بردار و ضرب خارجی دو بردار به کمک زاویه:



$|\vec a \times \vec b| = |\vec a||\vec b|\sin\theta$

مثال: اگر $|\vec a| = 5$، $|\vec b| = 8$ و کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\frac{-3}{5}$ باشد، طول بردار $\vec a \times \vec b$ را محاسبه کنید. $(0 \le \theta \le \pi)$

پاسخ: $\cos\theta = \frac{-3}{5}$

طبق قواعد مثلثات: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$= 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$$

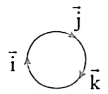
$$|\vec a \times \vec b| = |\vec a||\vec b|\sin\theta = 5 \times 8 \times \frac{4}{5} = 32$$

ضرب خارجی و داخلی بردارهای یکه

(1) $\vec i.\vec i = \vec j.\vec j = \vec k.\vec k = 1$ (2) $\vec i.\vec j = \vec j.\vec i = \vec i.\vec k = \vec k.\vec i = \vec j.\vec k = \vec k.\vec j = 0$

(3) $\vec i \times \vec i = \vec j \times \vec j = \vec k \times \vec k = \vec 0$

طبق دایرهٔ



داریم:

(4) $\begin{cases} \vec i \times \vec j = \vec k & \vec j \times \vec i = -\vec k \\ \vec j \times \vec k = \vec i & , \quad \vec k \times \vec j = -\vec i \\ \vec k \times \vec i = \vec j & \vec i \times \vec k = -\vec j \end{cases}$

نکته: بین ضرب داخلی دو بردار و طول ضرب خارجی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$|\vec a \times \vec b|^2 + (\vec a \cdot \vec b)^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2$$

اثبات: می‌دانیم: $|\vec a \times \vec b|^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2\sin^2\theta$ و $(\vec a \cdot \vec b)^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2\cos^2\theta$ و در نتیجه:

$$|\vec a \times \vec b|^2 + (\vec a \cdot \vec b)^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = |\vec a|^2|\vec b|^2$$

خواص ضرب خارجی

(1) طبق تعریف، $\vec a \times \vec b \perp \vec b$ و $\vec a \times \vec b \perp \vec a$، پس $\vec b.(\vec a \times \vec b) = 0$ و $\vec a.(\vec a \times \vec b) = 0$.

(2) $\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$ (3) $|\vec a \times \vec b| = |\vec b \times \vec a|$

(4) $\vec a \times \vec a = \vec 0$ (5) $r(\vec a \times \vec b) = r\vec a \times \vec b = \vec a \times r\vec b$

(6) $\begin{cases} \vec a \times (\vec b + \vec c) = \vec a \times \vec b + \vec a \times \vec c \\ (\vec a + \vec b) \times \vec c = \vec a \times \vec c + \vec b \times \vec c \end{cases}$ (خاصیت توزیع‌پذیری)

(7) $\vec a \parallel \vec b \Leftrightarrow \vec a \times \vec b = \vec 0$

(دو بردار موازی‌اند اگر و تنها اگر ضرب خارجی آن‌ها بردار صفر شود.)

مثال: اگر $|\vec a| = 4$، $|\vec b| = 5$ و $|(\vec a + \vec b) \times (\vec a - \vec b)| = 20$، زاویهٔ بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ را بیابید.

پاسخ:

$$20 = |(\vec a + \vec b) \times (\vec a - \vec b)| = |\vec a \times \vec a - \vec a \times \vec b + \vec b \times \vec a - \vec b \times \vec b|$$

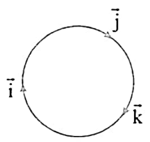
$$= |\vec 0 + \vec b \times \vec a + \vec b \times \vec a - \vec 0| = 2|\vec b \times \vec a| \Rightarrow 20 = 2|\vec b \times \vec a| \Rightarrow |\vec b \times \vec a| = 10$$

$$\Rightarrow |\vec b||\vec a|\sin\theta = 10 \Rightarrow 5 \times 4 \sin\theta = 10 \Rightarrow \sin\theta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \theta = 30^\circ$ یا 150°

مثال: حاصل عبارت روبه‌رو را بیابید. $2\vec i.(\vec j \times \vec k) + 3\vec j.(\vec i \times \vec k) + 4\vec k.(\vec i \times \vec j)$

پاسخ: طبق ضرب خارجی و داخلی بردارهای یکه داریم:



$\vec j \times \vec k = \vec i \qquad \vec i \times \vec k = -\vec j \qquad \vec i \times \vec j = \vec k$

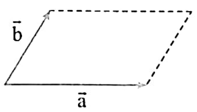
$$\Rightarrow 2\vec i.\vec i + 3\vec j.(-\vec j) + 4\vec k.\vec k = 2(1) - 3(1) + 4(1) = 3$$

مثال: نشان دهید دو بردار $\vec a = (1,-1,2)$ و $\vec b = (-2,2,-4)$ موازی‌اند.

پاسخ: کافی است ضرب خارجی آن‌ها بردار صفر شود:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (0,0,0) = \vec 0 \Rightarrow \vec a \parallel \vec b$$

نکتهٔ مهم: مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با: $S = |\vec a \times \vec b|$



در نتیجه مساحت مثلث ساخته‌شده روی $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با: $S = \frac{1}{2}|\vec a \times \vec b|$

مثال: اگر دو بردار $\vec a = (0,2,-1)$ و $\vec b = (1,3,1)$ دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت آن کدام است؟

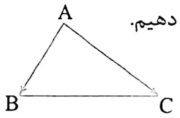
پاسخ: طبق نکته: $S = |\vec a \times \vec b|$

لذا ابتدا $\vec a \times \vec b$ را می‌یابیم:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (5,-1,-2)$$

بنابراین: $S = |\vec a \times \vec b| = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$

مثال مساحت مثلث به رئوس $A(۱,۲,۰)$ ، $B(۰,۱,۱)$ و $C(-۱,۳,۳)$ را بیابید.



پاسخ طبق شکل کافی است دو بردار $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را تشکیل دهیم.

آن‌گاه: $S=\frac{۱}{۲}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$

$\overline{AB}=B-A=(-۱,-۱,۱)$ $\quad$ $\overline{AC}=C-A=(-۲,۱,۳)$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۱ & -۱ & ۱\\ -۲ & ۱ & ۳\end{vmatrix}=(-۴,۱,-۳)\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱+۹}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$$

مثال اگر $|\vec{a}|=۵$ و $|\vec{b}|=۶$ و مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۱۵ باشد، زاویهٔ بین دو بردار چه‌قدر است؟

پاسخ می‌دانیم مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|\Rightarrow ۱۵=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow ۱۵=۵\times۶\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۳۰^\circ \text{ یا } ۱۵۰^\circ$$

مثال اگر $|\vec{a}|=۵$، $|\vec{b}|=۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۱۸$، ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را محاسبه کنید.

پاسخ می‌دانیم $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$، در نتیجه:

$$۱۸=۵\times۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۳}{۵}$$

طبق قواعد مثلثات:

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۴}{۵}$$

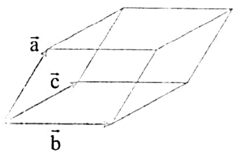
اگر θ را حاده در نظر بگیریم: $\cos\theta=\frac{۴}{۵}$

و در نتیجه: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۵\times۶\times\frac{۴}{۵}=۲۴$

و اگر θ را منفرجه در نظر بگیریم: $\cos\theta=\frac{-۴}{۵}$

و در نتیجه: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۵\times۶\times\frac{-۴}{۵}=-۲۴$

نکته اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرواقع در یک صفحه باشند، آن‌گاه می‌توان به کمک آن‌ها متوازی‌السطوحی مانند شکل روبه‌رو ساخت.



حجم این متوازی‌السطوح برابر است با: $\boxed{V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}$

که برای محاسبهٔ آن باید ابتدا حاصل $\vec{b}\times\vec{c}$ را پیدا کرده، سپس آن را در بردار $\vec{a}$ ضرب داخلی کنیم.

مثال حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط سه بردار $\vec{a}=(۱,-۱,۲)$، $\vec{b}=(۰,۲,۳)$ و $\vec{c}=(۱,۳,-۱)$ را بیابید.

پاسخ $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$

ابتدا $\vec{b}\times\vec{c}$ را می‌یابیم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & -۱\end{vmatrix}=(-۱۱,۳,-۲)\Rightarrow\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱,-۱,۲).(-۱۱,۳,-۲)$$

$$=-۱۱-۳-۴=-۱۸\Rightarrow V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۱۸|=۱۸$$

تذکر هرگاه $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$، آن‌گاه سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقع‌اند.

مثال مقدار m را چنان تعیین کنید که سه بردار $(۱,-۱,۱)$، $(۰,۲,۱)$ و $(m,۰,۲)$ در یک صفحه باشند.

پاسخ قرار می‌دهیم $\vec{a}=(m,۰,۲)$، $\vec{b}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۱)$. باید $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$.

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix}=(۳,۱,-۲)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(m,۰,۲).(۳,۱,-۲)=۳m+۰-۴=۰\Rightarrow m=\frac{۴}{۳}$$

ردیف | نمره

فصل اول

۱ الف) اگر ماتریس A اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبهٔ A باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها تعویض‌پذیر است. (درست ـ نادرست) ۱/۵

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 10 & -4\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{1403}=I$. (درست ـ نادرست)

ج) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$ برابر .... است.

د) از تساوی ماتریسی $A\times B=A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط .... نتیجه می‌شود $B=C$.

۲ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-1 & |i-j|>1\\ 0 & |i-j|=1\\ 1 & |i-j|<1\end{cases}$ باشد، ماتریس A^2-2I را به دست آورید. ۱/۵

۳ اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و $|A^3|=-8$ باشد، حاصل $\frac{|A^{-1}|}{|3A|}$ را بیابید. ۱

۴ دستگاه معادلات $\begin{cases}3x+7y=-4\\ -5x+2y=-7\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. ۱

۵ به ازای چه مقادیری از m، دستگاه معادلات $\begin{cases}-4x+(m-3)y=3\\ 2x-\frac{m-3}{2}y=1\end{cases}$ یک جواب منحصربه‌فرد دارد؟ ۱

فصل دوم

۶ دایره‌هایی که مرکز آن‌ها روی سهمی به معادلهٔ $(y-1)^2=-8(x+1)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادلهٔ .... مماس هستند. ۰/۵

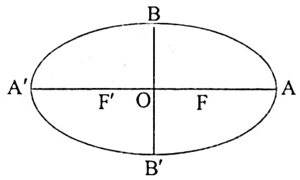
۷ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. ۱/۲۵

۸ وضعیت دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-6x+12y+20=0$، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید. ۱

۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند. ۱

۱۰ نقاط $B(-1,2)$ و $B'(-1,-4)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصلهٔ کانونی $2\sqrt{3}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید. ۱

۱۱ یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر $S_{\overset{\triangle}{BA'O}}=4S_{\overset{\triangle}{FBF'}}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. ۱



۱۲ معادلهٔ سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y=-2$ و کانون آن $F(1,-4)$ باشد. ۱

۱۳ یک شعاع نورانی در امتداد خط $x=4$ بر سهمی $x^2=8y$ می‌تابد. معادلهٔ خط بازتاب را بنویسید. ۱/۲۵

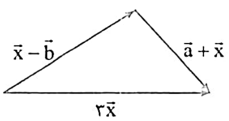
فصل سوم

۱۴ الف) خط به معادلهٔ $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$ بر صفحهٔ xOz عمود است. (درست ـ نادرست) ۱/۲۵

ب) معادلهٔ صفحه‌ای که موازی صفحهٔ yOz است و از نقطهٔ $A(2,-1,3)$ می‌گذرد، برابر با .... است.

ج) حاصل عبارت $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})$ برابر .... است.

د) در شکل مقابل بردار $\vec{x}$ برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با .... است.



هندسه (۳)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	

ردیف	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۳	نمره
۱۵	اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{3}, 2, 1)$ باشد، تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و اندازهٔ بردار تصویر را به دست آورید.	۱/۵
۱۶	اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، $6\sqrt{3}$ باشد و $\lvert\vec{a}\rvert = 4$، $\lvert\vec{b}\rvert = 3$، حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۷	دو بردار $\vec{a} = (-m, -1, -2)$ و $\vec{b} = (0, -3, m+2)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.	۱/۵
	موفق باشید	جمع نمرات ۲۰

ردیف — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی شهریور ۱۴۰۲ — نمره

فصل اول

۱ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

الف) برای هر دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B، در حالت کلی رابطهٔ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ برقرار است.

ب) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

۲ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}-1 & m\\ -2 & m\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$، چنان هستند که $C=3A+2B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید. ۱/۲۵

۳ با فرض $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$، ماتریس A^5 را محاسبه کنید. ۱

۴ الف) اگر A ماتریس 2×2 و اسکالر باشد و $a_{22}=3$، در این صورت A و $|A|$ را بیابید. ۱/۷۵

ب) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & 0\\ e & 0 & f\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ 0 & d & 0\\ e & 0 & f\end{bmatrix}$، (k عددی حقیقی است.) را در نظر بگیرید. با محاسبهٔ $|A|$ و $|B|$ نشان دهید که: $|B|=k|A|$.

۵ دستگاه $\begin{cases}3x-4y=1\\ -x+2y=1\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. ۱/۵

فصل دوم

۶ برای هر یک از عبارت‌های (الف) و (ب)، مورد مناسب را از بین کلمات (سهمی ـ بیضی ـ نقطه) انتخاب کرده و در پاسخ‌برگ وارد کنید (یک مورد اضافی است). ۰/۵

الف) فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی در حالتی که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از رأس آن بگذرد.

ب) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۷ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (دربارهٔ تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.) ۱/۵

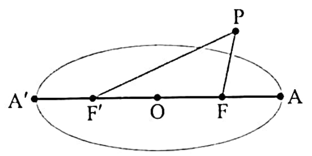
۸ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-2y+m=0$ با دایره به مرکز $O(2,-3)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد. ۱/۵

۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $4x-3y=2$، وتری به طول ۶ جدا کند. ۱/۲۵

۱۰ الف) خروج از مرکز یک بیضی با اندازهٔ قطرهای ۴ و ۶ را بیابید. ۱/۷۵

ب) نقطهٔ P بیرون بیضی با قطر بزرگ $AA'=2a$ و کانون‌های F و F' مفروض است.

ثابت کنید: $PF+PF'>2a$ (رسم شکل در پاسخ‌برگ الزامی است).



۱۱ سهمی به معادلهٔ $y^2-4x=4y$ داده شده است. مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید. ۱/۵

فصل سوم

۱۲ جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. ۱

الف) معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ $A(2,3,-1)$ و عمود بر محور xها به صورت .... می‌باشد.

ب) اگر $A(-1,0,3)$ و $B(5,2,-3)$، مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB به صورت .... است.

پ) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر .... می‌باشد.

ت) حاصل $2\vec{k}-(\vec{j}\times\vec{i})$ برابر .... است.

۱۳ برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$. (منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدرمطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ می‌باشد.) ۱

۱۴ فرض کنید $\vec{a}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ و $\vec{b}=(1,0,1)$، تصویر قائم بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید. ۱/۷۵

۱۵ نقاط $A(1,0,0)$، $B(0,-2,0)$ و $C(0,0,3)$ داده شده‌اند، ابتدا حاصل $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید. ۱/۵

۱۶ حجم متوازی‌السطوح ایجادشده توسط بردارهای $\vec{a}=(0,-1,1)$، $\vec{b}=(1,0,-1)$ و $\vec{c}=(0,-1,-1)$ را بیابید. ۰/۷۵

موفق باشید — جمع نمرات ۲۰

۱- الف) درست؛ (۰/۲۵) هر ماتریس اسکالر به صورت ضریبی از ماتریس همانی است؛ پس $A = KI$.

$$AB = BA \Rightarrow KIB = BKI \Rightarrow KB = KB \checkmark$$

(فصل ۱ - ویژگی ماتریس‌ها)

ب) نادرست (۰/۵) (فصل ۱ - توان در ماتریس)

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۰ & -۴ \end{bmatrix} = A \Rightarrow A^{۱۴۰۲} = A$$

ج) ۱۴ (۰/۵) (فصل ۱ - دترمینان)

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۴ & ۰ & -۲ \end{array}\right| \xlongequal{\text{ساروس}} (۱۶+۰+۶)-(۰-۴+۱۲)$$

$$= ۲۲ - ۸ = ۱۴$$

د) $|A| \neq ۰$ (A^{-1} موجود باشد.) (۰/۲۵) (فصل ۱ - وارون ماتریس)

۲- (فصل ۱ - ماتریس)

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

(فصل ۱ - دترمینان و وارون)

$$A^{۲} - ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

۳-

$$|A^{۳}| = |A|^{۳} = -۸ \Rightarrow |A| = -۲ \ (۰/۲۵)$$

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{۱}{|A|} = \dfrac{-۱}{۲} \ (۰/۲۵) \\ |۳A| = ۳^{۲}|A| = -۱۸ \ (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{|A^{-1}|}{|۳A|} = \dfrac{۱}{۳۶} \ (۰/۲۵)$$

۴- (فصل ۱ - دستگاه معادلات)

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow X = \underbrace{\frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}\begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

۵- روش اول (فصل ۱ - بحث در مورد تعداد جواب دستگاه)

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \text{دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{۴}{۲} \neq \frac{m-۳}{-\frac{m-۳}{۲}} \xleftrightarrow{m \neq ۳} -۲ \neq -۲ \ (۰/۵)$$

مشاهده می‌شود به ازای هیچ مقدار m نامساوی فوق برقرار نیست. (۰/۵)

روش دوم

$$|A| \neq ۰ \Leftrightarrow \text{دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد}$$

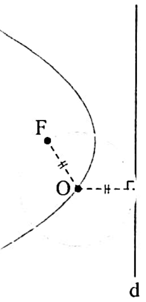
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -۴ & m-۳ \\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲} \end{vmatrix} = ۲(m-۳) - ۲(m-۳) = ۰ \ (۰/۵)$$

مشاهده می‌شود که m ای یافت نمی‌شود تا دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد. (۰/۵)

۶- $x = ۱$ (۰/۵) (فصل ۲ - مکان هندسی سهمی

می‌دانیم سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که از کانون آن می‌گذرد و بر خط هادی مماس است.

$(y-۱)^{۲} = -۸(x+۱)$

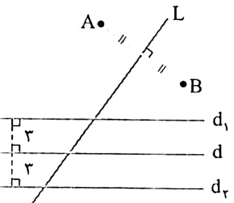


سهمی افقی بوده و دهانهٔ آن سمت چپ باز می‌شود

$S(-۱,۱), a = ۲$

معادلهٔ هادی $d : x = ۱$

۷- (فصل ۲ - مکان هندس



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB (خط L) است (۰/۲۵) و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر می‌باشند دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن می‌باشند (۰/۲۵). نقاط برخورد L و $d_۱$ و $d_۲$ نقاط مطلوب است.

بحث:

الف) اگر $L \parallel d_۱ \parallel d_۲$ باشد مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)

ب) اگر خط L، خط $d_۱$ (یا $d_۲$) را قطع کند و قطعاً خط $d_۲$ (یا $d_۱$) را نیز قطع می‌کن و مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)

پ) اگر خط L، بر $d_۱$ (یا $d_۲$) منطبق شود مسئله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۲۵)

۸- (فصل ۲ - اوضاع نسبی دو دای

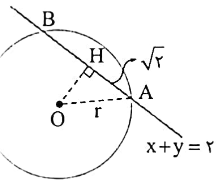
$O(۰,۰), r = ۳ \qquad x^{۲} + y^{۲} - ۶x + ۱۲y + ۲۰ = ۰$

$\Rightarrow \underbrace{O'(۳,-۶)}_{(۰/۲۵)}, r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۱۴۴-۸۰} = ۵ \ (۰/۲۵)$

$OO' = d = \sqrt{۹+۳۶} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \ (۰/۲۵)$

$-۳ < ۳\sqrt{۵} < ۵+۳ \Rightarrow$ (۰/۲۵) دو دایره متقاطع‌اند

۹- (فصل ۲ - نوشتن معادله دای



$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases}$$

$x = ۲, y = -۱ \Rightarrow O(۲,-۱) \ (۰/۲۵)$

$OH \perp AB \Rightarrow AH = BH = \sqrt{۲}$

$OH = \dfrac{|۲-۱-۲|}{\sqrt{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \ (۰/۲۵)$

$\overset{\triangle}{AOH} : r^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲} \ (۰/۲۵)$

$(x-۲)^{۲} + (y+۱)^{۲} = \frac{۵}{۲} \ (۰/۲۵)$

۱۰- (فصل ۲ - خواص بیض

$BB' = ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \ (۰/۲۵) \ , FF' = ۲c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow c = \sqrt{۳} \ (۰/۲۵)$

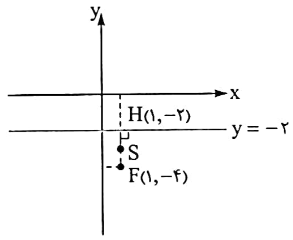
$a^{۲} = \underbrace{b^{۲} + c^{۲}}_{(۰/۲۵)} = ۹ + ۳ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow ۲a = ۴\sqrt{۳} \ (۰/۲۵)$

۱۱- می‌دانیم $OB \perp AA'$ است. (۰/۲۵) (فصل ۲ - خواص بیض

$S_{FBF'} = S_{BA'O} \Rightarrow \underbrace{۴(\cancel{\tfrac{۱}{۲}}(FF')(\cancel{OB}))}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\cancel{\tfrac{۱}{۲}}(OA')(\cancel{OB})}_{(۰/۲۵)}$

$(۲c) = a \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{۱}{۸} \ (۰/۲۵)$

-۱۲ (فصل ۲ - معادله سهمی)



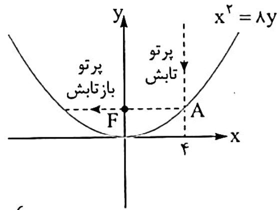
با توجه به شکل سهمی قائم بوده و دهانهٔ آن به سمت پایین باز می‌شود. (۰/۲۵)

$FH = ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$ (۰/۲۵)

رأس سهمی وسط FH قرار دارد، پس:

$S = \frac{H+F}{۲} = (۱, -۳)$ (رأس) (۰/۲۵) $(x-۱)^۲ = -۴(y+۳)$ (۰/۲۵)

-۱۳ (فصل ۲ - ویژگی بازتابندگی سهمی)



طبق خاصیت بازتابندگی سهمی هر پرتو نورانی که موازی محور بر بدنهٔ سهمی بتابد، آن‌گاه پرتو بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد.

$S(۰,۰), a = ۲ \Rightarrow F(۰,۲)$ (۰/۵)

$\begin{cases} x^۲ = ۸y \\ x = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱۶ = ۸y \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۴,۲)$ (۰/۵)

پرتو بازتابش همان AF بوده که معادلهٔ آن $y = ۲$ است. (۰/۲۵)

۱۴- الف) نادرست (بر صفحهٔ xoy عمود است.) (۰/۲۵) (فصل ۳ - خط در فضا)

ب) $x = ۲$ (این صفحه عمود بر صفحهٔ xها بوده و از A می‌گذرد؛ بنابراین طول نقاط صفحه مقدار ثابت ۲ است.) (۰/۲۵) (فصل ۳ - صفحات خاص)

ج) $\vec{o}$ (۰/۵) (فصل ۳ - ضرب خارجی)

$\vec{i} \times (\underbrace{\vec{j} \times \vec{k}}_{\vec{i}}) = \vec{o}$

د) $\vec{a} - \vec{b}$ (فصل ۳ - مجموع دو بردار روش مثلثی)

$\vec{x} - \vec{b} + \vec{a} + \vec{x} = ۳\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ (۰/۲۵)

-۱۵ (فصل ۳ - تصویر قائم بردار)

$\vec{a} = (-۱, ۰, -\sqrt{۳})$ (۰/۲۵)

$\vec{b}' = \underbrace{(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^۲})\vec{a}}_{(۰/۲۵)} = (\frac{-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۴})(-۱, ۰, -\sqrt{۳})$ (۰/۲۵)

$= (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲})$ (۰/۲۵) $|\vec{b}'| = \sqrt{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۲}}{۲} = \sqrt{۳}$ (۰/۲۵)

-۱۶ (فصل ۳ - کاربرد ضرب خارجی در محاسبه مساحت)

$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (۰/۲۵)

$= ۴\times۳\times\sin\theta = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \pm\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^۲ - |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (۰/۲۵)

$= \underbrace{۱۶ - ۴\times۳\times(\pm\frac{۱}{۲})}_{(۰/۲۵)} = \begin{cases} ۱۰ \\ ۲۲ \end{cases}$ (۰/۵)

۱۷- محاسبهٔ m: روش اول (فصل ۳ - حجم متوازی السطوح)

$\vec{a}+\vec{b} = (-m, -۴, m)$

$\vec{a}-\vec{b} = (-m, ۲, -m-۴)$ (۰/۲۵)

$\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = ۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow m^۲ - ۸ - m^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m = -۲$ (۰/۲۵)

روش دوم می‌دانیم دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ دو قطر متوازی‌الاضلاعی هستند که از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود. اگر $\vec{a}+\vec{b}$ عمود بر $\vec{a}-\vec{b}$ باشد متوازی‌الاضلاع، لوزی یا مربع است که در هر دو صورت $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ می‌باشد. (۰/۲۵)

$\sqrt{m^۲+۱+۴} = \sqrt{۹+(m+۲)^۲}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow m^۲+۵ = m^۲+۴m+۱۳ \Rightarrow m = -۲$ (۰/۲۵)

$\vec{a} = (۲, -۱, -۲), \vec{b} = (۰, -۳, ۰)$

محاسبهٔ حجم متوازی السطوح:

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = -۶\vec{i} - ۶\vec{k} = (-۶, ۰, -۶)$ (۰/۲۵)

روش اول

$V_{\text{حجم متوازی‌السطوح}} = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b}))|$ (۰/۲۵)

$= \underbrace{\left|\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ -۶ & ۰ & -۶ \end{vmatrix}\right|}_{(۰/۲۵)} = ۷۲$

روش دوم

$V_{\text{حجم متوازی‌السطوح}} = \underbrace{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}_{(۰/۲۵)} = |\vec{a}\times\vec{b}|^۲ = ۷۲$ (۰/۲۵)

پاسخ آزمون شهریور ماه ۱۴۰۳

۱- الف) نادرست (۰/۲۵)؛ در ماتریس‌ها چون خاصیت جابه‌جایی در ضرب برقرار نیست؛ پس اتحادها درست نیستند. (فصل ۱ - خواص ضرب ماتریس‌ها)

ب) درست (۰/۲۵) (فصل ۱ - وارون ماتریس)

-۲ $C = ۳A + ۲B = \underbrace{\begin{bmatrix} -۳ & ۳m \\ -۶ & ۳m \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۳m-۶ \\ ۰ & ۳m+۲ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$

(اگر به صورت مستقیم ماتریس C محاسبه شده بود (۰/۷۵) نمره داده شود.)

$\underbrace{۳m-۶ = ۰ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر اصلی = ۹ (۰/۲۵)

(فصل ۱ - اعمال جبری روی ماتریس‌ها)

-۳ روش اول

$\underbrace{A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲I}_{(۰/۵)}$

$\Rightarrow \underbrace{A^۴ = A^۲ \times A^۲ = (۲I)\times(۲I) = ۴I^۲ = ۴I}_{(۰/۲۵)}$

$\Rightarrow \underbrace{A^۵ = A \times A^۴ = A \times (۴I) = ۴A}_{(۰/۲۵)}$ یا $A^۵ = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix}$

روش دوم

$\underbrace{A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲I}_{(۰/۵)}$

$\Rightarrow \underbrace{A^۳ = A \times A^۲ = A \times (۲I) = ۲A}_{(۰/۲۵)}$

$\Rightarrow \underbrace{A^۵ = A^۲ \times A^۳ = (۲I)\times(۲A) = ۴A}_{(۰/۲۵)}$ یا $A^۵ = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix}$

روش سوم

$$\underbrace{A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A^4=A\times A^3=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{A^5=A\times A^4=\begin{bmatrix}4&4\\4&-4\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

(فصل ۱ - توان در ماتریس)

۴- الف)

$$\underbrace{A=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{|A|=9}_{(0/25)}$$

ب)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}a&b&c&a&b\\0&d&0&0&d\\e&0&f&e&0\end{array}\right.$$

$$\underbrace{\Rightarrow |A|=(adf+0+0)-(edc+0+0)=adf-edc}_{(0/5)}$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc|cc}ka&kb&kc&ka&kb\\0&d&0&0&d\\e&0&f&e&0\end{array}\right.\Rightarrow |B|=kadf-kedc}_{(0/5)}$$

$$=\underbrace{k(adf-edc)=k|A|}_{(0/25)}$$

(فصل ۱ - دترمینان)

۵- روش اول

$$\underbrace{A=\begin{bmatrix}3&-4\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=6-4=2}_{(0/25)},\underbrace{A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}}_{(0/5)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}}_{(0/25)}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\ (0/25)\\y=2\ (0/25)\end{cases}$$

روش دوم

$$\underbrace{A=\begin{bmatrix}3&-4\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=6-4=2}_{(0/25)}$$

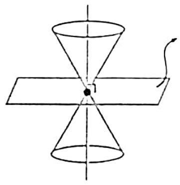
$$\underbrace{,A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}}_{(0/5)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{(0/25)}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\ (0/25)\\y=2\ (0/25)\end{cases}$$

(فصل ۱ - دستگاه معادلات)

۶- الف) نقطه (۰/۲۵)

(فصل ۲ - مکان هندسی)



ب) سهمی (تعریف مکان هندسی سهمی) (۰/۲۵)

(فصل ۲ - مکان هندسی)

۷- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ cm باشند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۲ cm می‌باشد (۰/۲۵) و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ cm باشند، دو خط L و L' موازی با d و به فاصلهٔ ۳ cm از آن هستند (۰/۲۵). نقطهٔ برخورد آن دایره با این دو خط موازی (L و L')، جواب مسئله است. (۰/۲۵)

بحث در وجود جواب:

حالت اول: دایره یکی از خطوط L یا L' را در دو نقطه قطع می‌کند. در این حالت مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)

حالت دوم: دایره بر یکی از خطوط L یا L' مماس است. در این حالت مسئله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

حالت سوم: دایره هیچ‌یک از خطوط L و L' را قطع نمی‌کند. در این حالت مسئله فاقد جواب است. (۰/۲۵)

(اگر حالت‌های بالا با رسم شکل بیان شده باشد، به هر حالت (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.)

(فصل ۲ - مکان هندسی)

۸- روش اول

$$O(2,-3),r=3$$

$$\underbrace{O'(-1,1)}_{(0/25)},\underbrace{r'=\frac{1}{2}\sqrt{8-4m}=\sqrt{2-m}}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{d=OO'=\sqrt{9+16}=5}_{(0/25)},\underbrace{r+r'=d\Rightarrow 3+\sqrt{2-m}=5}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2-m}=2\Rightarrow 2-m=4\Rightarrow m=-2}_{(0/5)}$$

روش دوم

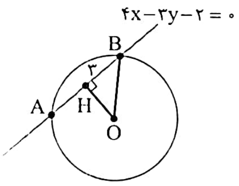
$$\underbrace{O'(-1,1)}_{(0/25)},\underbrace{r'=\frac{1}{2}\sqrt{8-4m}}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{d=OO'=\sqrt{9+16}=5}_{(0/25)},\underbrace{r+r'=d\Rightarrow 3+\frac{1}{2}\sqrt{8-4m}=5}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{8-4m}=4\Rightarrow 8-4m=16\Rightarrow m=-2}_{(0/5)}$$

(فصل ۲ - وضعیت دو دایره)

۹- شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، لذا $\underbrace{HB=3}_{(0/25)}$.



(یا تعیین HB روی شکل (۰/۲۵))

$$\underbrace{OH=\frac{|4+3-2|}{\sqrt{16+9}}=\frac{5}{5}=1}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{r^2=OH^2+HB^2=1+9=10}_{(0/25)}$$

معادلهٔ دایره:

$$\underbrace{(x-1)^2+(y+1)^2=10}_{(0/5)}$$

(فصل ۲ - معادله دایره)

۱۰- الف) روش اول

$$\underbrace{\begin{cases}2a=6\Rightarrow a=3\\2b=4\Rightarrow b=2\end{cases}}_{(0/25)}$$

$$\underbrace{a^2=b^2+c^2\Rightarrow 9=4+c^2\Rightarrow c=\sqrt{5}}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}}_{(0/25)}.$$

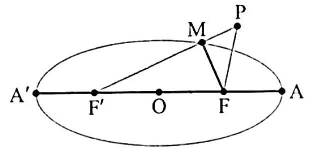
روش دوم

$$\underbrace{\begin{cases}2a=6\Rightarrow a=3\\2b=4\Rightarrow b=2\end{cases}}_{(0/25)}$$

$$e=\frac{c}{a}=\underbrace{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}}_{(0/25)}=\underbrace{\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}}_{(0/25)},$$

ب) روش اول محل تلاقی PF' با بیضی را M می‌نامیم (یا مشخص‌کردن M روی شکل). (۰/۲۵)

در مثلث PMF، بنا بر قضیهٔ نامساوی مثلث داریم: $\underbrace{PF+MP>MF}_{(0/25)}$



پس با افزودن MF' به طرفین نامساوی خواهیم داشت:

$$\underbrace{PF+\overbrace{MP+MF'}^{PF'}>MF+MF'}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{PF+PF'>2a}_{(0/25)}$$

روش دوم

محل تلاقی PF' با بیضی را M می‌نامیم (یا مشخص‌کردن M روی شکل). (۰/۲۵)

$$PF+PF'=\underbrace{PF+\overbrace{PM+MF'}^{PF'}}_{(0/25)}>\underbrace{MF+MF'}_{(0/25)}\underbrace{=2a}_{(0/25)}$$

(فصل ۲ - بیضی)

۱۱- روش اول

$$y^2-4y=4x \Rightarrow y^2-4y+4=4x+4$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=4(x+1)\ (0/25)$$

لذا سهمی فوق یک سهمی افقی رو به راست می‌باشد و در آن داریم:

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{S(-1,2)}_{(0/5)}$$ رأس سهمی

$$\underbrace{4a=4 \Rightarrow a=1}_{(0/25)}$$

کانون: $\underbrace{F(0,2)}_{(0/25)}$ خط هادی: $\underbrace{x=-2}_{(0/25)}$

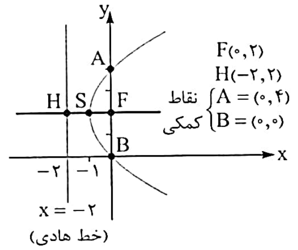
(فصل ۲ - سهمی)

روش دوم

$$y^2-4y=4x \Rightarrow y^2-4y+4=4x+4 \Rightarrow (y-2)^2=4(x+1)\ (0/25)$$

$$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow S=(\alpha,\beta)=(-1,2)\ (0/5) \\ 4a=4 \Rightarrow a=1>0\ (0/25)$$

سهمی افقی و دهانهٔ سهمی به سمت راست باز می‌شود.



(۰/۵)

(فصل ۲ - سهمی)

۱۲- الف) $x=2$ (۰/۲۵)

(فصل ۳ - معادلهٔ صفحات خاص)

ب) $M(2,1,0)$؛ (۰/۲۵) زیرا:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{5-1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{-3+3}{2}\right)=(2,1,0)$$

(فصل ۳ - نقطه در فضا)

پ) صفر؛ (۰/۲۵) زیرا $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر بردار $\vec{a}$ عمود است پس ضرب داخلی صفر است؛ یعنی $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$

(فصل ۳ - ضرب داخلی و خارجی)

ت) $-3k$؛ (۰/۲۵) زیرا: $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

(فصل ۳ - ضرب خارجی)

۱۳- روش اول فرض می‌کنیم θ زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، در این صورت:

$$\underbrace{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|}_{(0/5)}$$

$$\underbrace{\overset{|\cos\theta|\le 1}{\le} |\vec{a}||\vec{b}|(1)=|\vec{a}||\vec{b}|}_{(0/5)}$$

روش دوم فرض می‌کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$، در این صورت:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}.\vec{b}|^2\le|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}_{(0/25)}$$

$$\Leftrightarrow a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3$$
$$+2a_2b_2a_3b_3\le a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2$$
$$\underbrace{+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2}_{(0/25)}$$

$$\Leftrightarrow 0\le a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_3^2-2a_1b_1a_3b_3+a_3^2b_1^2$$
$$+a_2^2b_3^2-2a_2b_2a_3b_3+a_3^2b_2^2 \Leftrightarrow 0\le(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$\underbrace{+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2}_{(0/25)}$$

چون رابطهٔ اخیر همواره درست بوده و روابط بالا بازگشت‌پذیرند پس حکم همواره برقرار است. (۰/۲۵)

(فصل ۳ - نامساوی کشی‌شوآرتز)

۱۴-

$$\underbrace{\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=(3,-1,1)-(1,0,1)=(2,-1,0)}_{(0/5)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{c}.\vec{b}=2+0+0=2\ (0/5)\\ \underbrace{|\vec{b}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}}_{(0/25)}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\vec{c}'=\frac{\vec{c}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{2}{2}(1,0,1)=(1,0,1)}_{(0/5)}$$

(فصل ۳ - تصویر قائم بردار)

۱۵-

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{\overrightarrow{AB}=(-1,-2,0)}_{(0/25)}\\ \underbrace{\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)}_{(0/25)}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,3,-2)}_{(0/5)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+9+4}=\frac{7}{2}}_{(0/5)}$$

(فصل ۳ - کاربرد ضرب خارجی در محاسبهٔ مساحت)

۱۶- روش اول

$$\underbrace{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-2}_{(0/5)} \Rightarrow \underbrace{V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-2|=2}_{(0/25)}$$

روش دوم

$$\underbrace{\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1,1,-1)}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0-1-1=-2}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-2|=2}_{(0/25)}$$

(اگر برای محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح از ترتیب‌های دیگر ضرب مختلط استفاده شده بود مشابه بالا نمره داده شود.)

(فصل ۳ - حجم متوازی‌السطوح)

توی دنیای مجازی

هی ما رو بگیرن

توی وبسایت خیلی‌سبز هم می تونین خرید کنید هم سؤال بپرسین و هم جوابشو بگیرین و هم از اوضاع و احوال کتاب های جدید باخبر بشین.

www.Kheilisabz.com

کانال تلگرام خیلی‌سبز هم هست، توی این کانال ما با شما حرف می زنیم، از اتفاقات روزمره زندگی بگیر تا کتابای جدید و حتی انتخاب رشته کنکور!

telegram.me/kheilisabzpub

ما خیلی‌سبزیا کلاً تصویر دوست داریم، میدونین که! توی اینستاگرام خیلی‌سبز هم میتونیم با هم حرف بزنیم هم عکسامون رو نشون بدیم!

instagram.com/kheilisabz

راستی هنوز تلفنم داریم:

۰۲۱-۶۴۳۵۶۳

خیلی سبز

اپلیکیشن خیلی بوکز

کتاب های دیجیتال خیلی سبز

دانلود از:

www.Kheilisabz.com

- برای کاهش هزینه ها!
- برای جلوگیری از قطع درخت ها!
- برای دسترسی راحت تر!
- و برای کلی چیزهای خوب دیگه!

از همهٔ آدم‌های باحال، سرحال و توانمند در حوزهٔ بازاریابی و فروش، منابع انسانی، سخت‌افزار و نرم‌افزار، مالی و اداری بازرگانی، تحلیل و توسعهٔ کسب و کار، زنجیرهٔ تامین و تولید کتاب دعوت می‌کند به صرف چای، شیرینی و همکاری:

HR@kheilisabz.com

همچنین از همهٔ آدم‌های خلاقی که ایده‌ای برای تولید محتوای آموزشی دارند یا به همکاری در تألیف و ویراستاری کتاب های کمک آموزشی دوره‌های ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم و کنکور علاقه‌مندند، دعوت می‌شود برای یک گپ دوستانه و تولید کتاب:

talent@kheilisabz.com

خیلی سبز

سلام برون!

خیلی سبز!

کتاب های بانک نهایی

امتحانات نهایی
با ۲۰ تمام میشه

- انگلیسی دوازدهم ☆ هندسه دوازدهم
- ☆ فارسی دوازدهم ☆ دین و زندگی دوازدهم ☆ شیمی دوازدهم ☆ عربی دوازدهم
- ☆ هویت اجتماعی دوازدهم ☆ سلامت و بهداشت دوازدهم

| kheilisabz | @kheilisabzpub |

9 786004 127370